

*Алымкулов С.А., Аккозов А.Д.***ДВУХАМПЛИТУДНЫЙ МЕТОД ДЛЯ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ
ФУРЬЕ-ГОЛОГРАММ СИММЕТРИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ***S.A. Alymkulov, A.D. Akkozov***DOUBLE-AMPLITUDE METHOD FOR SYNTHESIS OF DIGITAL FOURIER-
HOLOGRAMS OF SYMMETRY OBJECTS**

УДК 681.385

Предлагается метод для синтеза цифровых фурье-голограмм объектов, описываемых функцией с комплексно-сопряженной симметрией. Приводятся два способа реализации предлагаемого метода

Double – amplitude method for synthesis of objects digital Fourier-holograms , described by the functions with complex - conjugated symmetry is offered. Two ways of realization of the offered method are shown

Пусть двумерный голографируемый объект с пространственными размерами $a_1 \times b_1$ описывается своей излучательной функцией $u(x, y)$ такой, что она обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии:

$$u(-x, -y) = u^*(x, y).$$

Тогда его фурье-образ

$$U(\xi, \eta) = F\{u(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \exp[-i2\pi(x\xi + y\eta)] dx dy$$

является вещественной функцией. Поэтому она может быть представлена как сумма двух комплекснозначных, но чисто амплитудных функций, т.е. функций фазовые части, которых постоянны (не зависят от пространственных частот ξ и η):

$$U(\xi, \eta) = U_1(\xi, \eta) + U_2(\xi, \eta),$$

где

$$U_1(\xi, \eta) = A_1(\xi, \eta)e^{i0} = A_1(\xi, \eta), \quad U_2(\xi, \eta) = A_2(\xi, \eta)e^{i\pi} = -A_2(\xi, \eta)$$

что означает $|U_1(\xi, \eta)| = A_1(\xi, \eta), \quad \arg U_1(\xi, \eta) = 0,$

$$|U_2(\xi, \eta)| = A_2(\xi, \eta), \quad \arg U_2(\xi, \eta) = \pi.$$

Такое представление можно рассматривать как разложение вектора $U(\xi, \eta)$ на комплексной плоскости по двум противоположным векторам $e_1 = e^{i0}$ и $e_2 = e^{i\pi}$. При этом неотрицательные функции $A_1(\xi, \eta)$ и $A_2(\xi, \eta)$ рассматриваются как проекции вектора $U(\xi, \eta)$ на базисных векторах e_1 и e_2 соответственно. Очевидно, что

$$A_1(\xi, \eta) = \begin{cases} U(\xi, \eta), & \text{если } U(\xi, \eta) \geq 0, \\ 0, & \text{если } U(\xi, \eta) < 0, \end{cases}$$

$$A_2(\xi, \eta) = \begin{cases} -U(\xi, \eta), & \text{если } U(\xi, \eta) < 0, \\ 0, & \text{если } U(\xi, \eta) \geq 0. \end{cases}$$

Это означает, что значения $A_1(\xi, \eta)$ и $A_2(\xi, \eta)$ могут быть вычислены по следующим формулам

$$A_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[U(\xi, \eta) + |U(\xi, \eta)|],$$

$$A_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[-U(\xi, \eta) + |U(\xi, \eta)|].$$

Пусть ставится задача синтеза голограммы объекта $u(x, y)$ на амплитудных средах.

Если следовать методам Ли и Беркхарда, то напрашивается метод, у которого для записи компонент одного отсчета $U_{nm} = U(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ достаточно два соседних элемента разрешения в строке регистрирующей среды, а не три и четыре элемента, как это было в методах Беркхарда и Ли соответственно [1-4]. Так как метод основан на разложении кодируемого Фурье-образа на сумму двух амплитудных функций, назовем его двухамплитудным. Ниже подробно рассматриваются два возможных способа реализации двухамплитудной записи.

1. Несогласованная запись

Для записи одного отсчета $U_{nm} = U(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ отводится одна ячейка (n, m) , представляющая прямоугольную область размерами в пространственных частотах $\Delta\xi \times \Delta\eta$ и с центром в точке $(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$. Эта прямоугольная область делится вдоль оси ξ на две одинаковых по размерам подъячейки. Первая (левая) из них представляет собой прямоугольник с размерами $\frac{\Delta\xi}{2} \times \Delta\eta$ и с центром в точке $(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta)$. Вторая же (правая)- прямоугольник такого же размера, но с центром в точке $(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta)$. При этом модули $A_{1nm} = A_1(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ и $A_{2nm} = A_2(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ двух компонент $U_{1nm} = U_1(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ и $U_{2nm} = U_2(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ отсчета $U_{nm} = U(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ кодируются амплитудными коэффициентами пропускания (или же отражения, если синтезируется отражательная голограмма) t_{1nm} и t_{2nm} левой, и правой подъячеек соответственно (см.рис.1,a). Кодирование же фаз $\varphi_{1nm} = \arg U_{1nm} = 0$ и $\varphi_{2nm} = \arg U_{2nm} = \pi$ обеспечивается как и у методов Ли и Беркхарда фазовым набегом. При этом значения t_{1nm} и t_{2nm} вычисляются по формулам

$$t_{1nm} = \kappa A_{1nm} = \kappa A_1(n\Delta\xi, m\Delta\eta) \quad (1)$$

$$t_{2nm} = \kappa A_{2nm} = \kappa A_2(n\Delta\xi, m\Delta\eta), \quad (2)$$

где

k -коэффициент пропорциональности, которая выбирается из условий $t_{1nm} \leq 1$ и $t_{2nm} \leq 1$, означающих, что значение k должно быть таким, что

$k \leq \frac{1}{A_{\max}}$, где $A_{\max} = \max_{n,m} \{A_{1nm}, A_{2nm}\}$. Примем значение k равным его максимально возможному значению,

$$\text{т. е. } k = \frac{1}{A_{\max}}. \quad (3)$$

Матрица полученных таким образом ячеек и образует двухамплитудную голограмму, функция пропускания которой запишется в виде:

$$T(\xi, \eta) = T_1(\xi, \eta) + T_2(\xi, \eta),$$

где

$$T_1(\xi, \eta) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M t_{1nm} \text{rect}_2 \left[\frac{\xi - \left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4} \right)}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta - m\Delta\eta}{\Delta\eta} \right],$$

$$T_2(\xi, \eta) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M t_{2nm} \text{rect}_2 \left[\frac{\xi - \left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4} \right)}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta - m\Delta\eta}{\Delta\eta} \right],$$

которые с учетом формул (1) и (2) запишутся в виде

$$T_1(\xi, \eta) = \frac{1}{A_{\max}} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M A_{1nm} \text{rect}_2 \left[\frac{\xi - \left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4} \right)}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta - m\Delta\eta}{\Delta\eta} \right],$$

$$T_2(\xi, \eta) = \frac{1}{A_{\max}} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M A_{2nm} \text{rect}_2 \left[\frac{\xi - \left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4} \right)}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta - m\Delta\eta}{\Delta\eta} \right].$$

Для восстановления изображения, голограмма освещается плоской световой волной, которая падает на голограмму нормально. В этом случае дифрагированная голограммой световая волна в непосредственной её близости имеет распределение комплексной амплитуды

$$H(\xi, \eta) = T(\xi, \eta) \cdot R(\xi, \eta) = T(\xi, \eta).$$

Поэтому восстановленное изображение запишется как

$$\tilde{h}(x, y) \sim F^{-1} \{H(\xi, \eta)\} = F^{-1} \{T(\xi, \eta)\} = t_1(x, y) + t_2(x, y),$$

где $t_1(x, y) = F^{-1} \{T_1(\xi, \eta)\}$, $t_2(x, y) = F^{-1} \{T_2(\xi, \eta)\}$.

Определим $t_1(x, y)$ и $t_2(x, y)$ по отдельности. Но прежде представим $T_1(\xi, \eta)$ и $T_2(\xi, \eta)$ в удобном для выполнения обратного преобразования Фурье виде. При этом будем полагать, что голограмма имеет размеры достаточно большой протяженности, т. е. будем считать, что $N \approx \infty$ и $M \approx \infty$.

$$T_1(\xi, \eta) = \frac{1}{A_{\max}} \text{rect}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) * \left\{ \delta\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{4}\right) * \left[A_1(\xi, \eta) \text{comb}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) \right] \right\}, \quad (4)$$

$$T_2(\xi, \eta) = \frac{1}{A_{\max}} \text{rect}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) * \left\{ \delta\left(\xi - \frac{\Delta\xi}{4}\right) * \left[A_2(\xi, \eta) \text{comb}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) \right] \right\}, \quad (5)$$

где $\text{comb}_2(x, y)$ -двумерная гребенчатая (её еще называют решётчатой) функция, определяемая как произведение двух одномерных гребенчатых функций:

$$\text{comb}_2(x, y) = \text{comb}(x) \cdot \text{comb}(y).$$

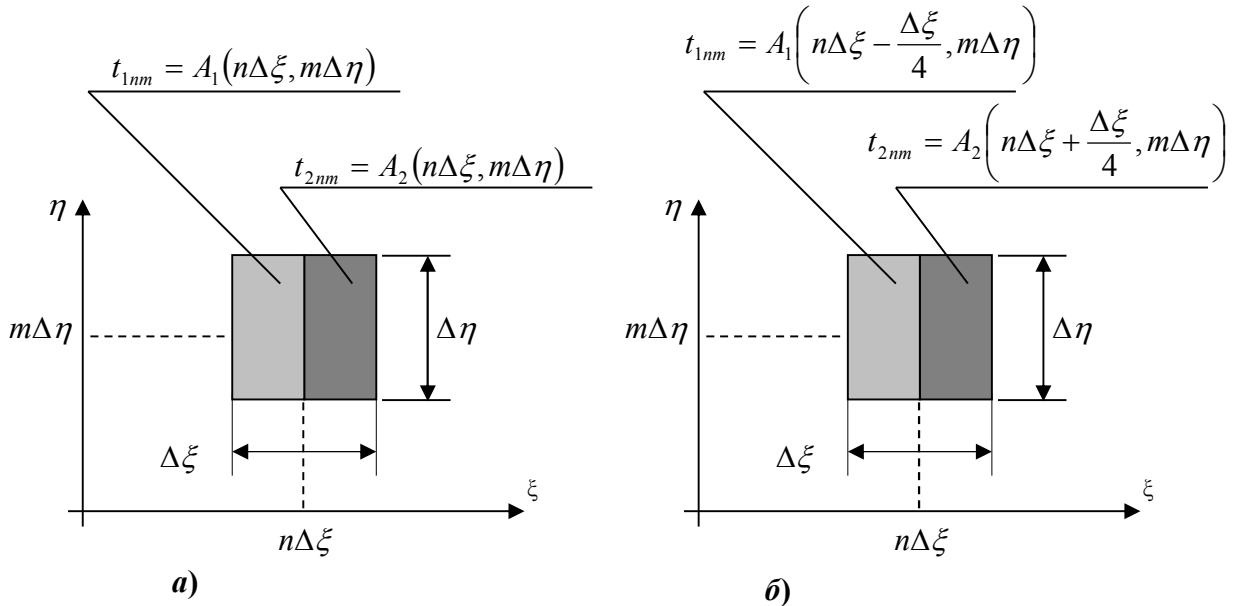


Рис.1. Структура ячейки (n, m) двухамплитудной голограммы: при несогласованной записи (а) и при согласованной записи (б)

Тогда можно записать, что

$$\begin{aligned} t_1(\xi, \eta) &= F^{-1}\{T(\xi, \eta)\} = \frac{1}{A_{\max}} F^{-1}\left\{\text{rect}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right)\right\} \cdot \left\{ F^{-1}\left[\delta\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{4}\right)\right] \times \right. \\ &\times \left. \left[F^{-1}\{A_1(\xi, \eta)\} * F^{-1}\left\{\text{comb}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right)\right\} \right] \right\} = \frac{1}{A_{\max}} \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \text{sinc}(\Delta\eta y) \times \\ &\times \left\{ \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) [a_1(x, y) * \text{comb}_2(\Delta\xi x, \Delta\eta y)] \right\} = \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{A_{\max}} \frac{\Delta \xi}{2} \Delta \eta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \xi}{2} x\right) \operatorname{sinc}(\Delta \eta y) \times \left[\exp\left(-i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x\right) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_1\left(x - p \frac{1}{\Delta \xi}, y - q \frac{1}{\Delta \eta}\right) \right],$$

где

$$a_1(x, y) = F^{-1}\{A_1(\xi, \eta)\}. \quad (7)$$

Аналогичным способом определяем $t_2(x, y)$:

$$t_2(x, y) = \frac{1}{A_{\max}} \frac{\Delta \xi}{2} \Delta \eta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \xi}{2} x\right) \operatorname{sinc}(\Delta \eta y) \times \left[\exp\left(i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x\right) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_2\left(x - p \frac{1}{\Delta \xi}, y - q \frac{1}{\Delta \eta}\right) \right], \quad (8)$$

где

$$a_2(x, y) = F^{-1}\{A_2(\xi, \eta)\}. \quad (9)$$

Теперь суммируя $t_1(x, y)$ и $t_2(x, y)$, определяем восстановленное изображение для случая несогласованной записи.

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, y) \sim t_1(x, y) + t_2(x, y) &= \frac{1}{A_{\max}} \frac{\Delta \xi}{2} \Delta \eta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \xi}{2} x\right) \operatorname{sinc}(\Delta \eta y) \times \\ &\times \left[\exp\left(-i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x\right) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_1\left(x - p \frac{1}{\Delta \xi}, y - q \frac{1}{\Delta \eta}\right) + \exp\left(i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x\right) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_2\left(x - p \frac{1}{\Delta \xi}, y - q \frac{1}{\Delta \eta}\right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Из последнего выражения видно, что восстановленное изображение состоит из дифракционных порядков (p, q) . Общая картина маскируется произведением маскирующих функций $\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \xi}{2} \Delta \xi x\right)$ и $\operatorname{sinc}(\Delta \eta y)$, которое приводят к завалу яркости изображения к краям от центра вдоль оси x и y соответственно.

Проанализируем, что собой представляет изображение в области произвольного порядка (r, s) дифракции. Для этого в области этого порядка дифракции введем систему пространственных координат x_r и y_s с началом в его центре. Тогда очевидны равенства $x = r \frac{1}{\Delta \xi} + x_r$ и $y = s \frac{1}{\Delta \eta} + y_s$. Ясно, что для области порядка (r, s) дифракции выполняются условия $|x_r| \leq \frac{a_l}{2}$ и $|y_s| \leq \frac{b_l}{2}$. Обозначим распределение комплексных амплитуд света в системе координат x_r, y_s через $\tilde{h}_{rs}(x_r, y_s)$. Если шаги дискретизации $\Delta \xi$ и $\Delta \eta$ выбраны из условий $\Delta \xi \leq \frac{1}{a_l}$ и $\Delta \eta \leq \frac{1}{b_l}$, то изображения соседних дифракционных порядков взаимно перекрывать не будут. Поэтому при записи выражения для $\tilde{h}_{rs}(x, y)$ в двойных суммах из (10) останутся только по одному слагаемому, а именно слагаемые, для которых $p = r$ и $q = s$:

$$\tilde{h}_{rs}(x_r, y_s) = h\left(\frac{r}{\Delta \xi} + x_r, \frac{s}{\Delta \eta} + y_s\right) \sim \frac{\Delta \xi}{2} \Delta \eta \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta \xi}{2}\left(\frac{r}{\Delta \xi} + x_r\right)\right] \operatorname{sinc}\left[\Delta \eta\left(\frac{s}{\Delta \eta} + y_s\right)\right] \times$$

$$\times \left[\exp \left[-i \frac{\pi}{2} \xi \left(\frac{r}{\Delta \xi} + x_r \right) \right] a_1(x_r, y_s) + \exp \left[i \frac{\pi}{2} \Delta \xi \left(\frac{r}{\Delta \xi} + r_r \right) \right] a_2(x_r, y_s) \right]. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$\exp \left[\pm i \frac{\pi}{2} \Delta \xi \left(\frac{r}{\Delta \xi} + x_r \right) \right] = \exp \left(\pm i \frac{\pi}{2} r \right) \exp \left(\pm i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x_r \right),$$

из (11) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{rs}(x_r, y_s) \sim & \frac{\Delta \xi}{2} \Delta \eta \operatorname{sinc} \left[\frac{\Delta \xi}{2} \left(\frac{r}{\Delta \xi} + x_r \right) \right] \operatorname{sinc} \left[\Delta \eta \left(\frac{1}{\Delta \eta} + y_s \right) \right] \exp \left(-i \frac{\pi}{2} r \right) \times \\ & \times \left[\exp \left(-i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x_r \right) a_1(x_r, y_s) + \exp \left(i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x_r \right) a_2(x_r, y_s) \right] e^{i\pi r}. \end{aligned}$$

В дальнейшем из этого выражения отбросим стоящий перед открывающейся квадратной скобкой постоянный фазовый множитель $\exp \left(-i \frac{\pi}{2} r \right)$, который не влияет на общий характер распределения комплексной амплитуды и по тому являющийся несущественным.

Если для $|x_r| \leq \frac{a_r}{2}$ и $|y_r| \leq \frac{a_r}{2}$ допустить, что

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } & \operatorname{sinc} \left[\frac{\Delta \xi}{2} \left(\frac{r}{\Delta \xi} + x_r \right) \right] \approx \operatorname{const}_1, \\ \text{б) } & \operatorname{sinc} \left[\Delta \eta \left(\frac{s}{\Delta \eta} + y_s \right) \right] \approx 1, \\ \text{в) } & \exp \left(\pm i \frac{\pi}{2} \Delta \xi x_r \right) \approx 1, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

то восстановленное изображение в области дифракционного порядка (r, s) запишется в виде

$$\tilde{h}_{r,s}(x_r, y_s) \sim a_1(x_r, y_s) + a_2(x_r, y_s) e^{i\pi r} = a_1(x_r, y_s) + (-1)^r a_2(x_r, y_s). \quad (13)$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} u(x, y) &= F^{-1} \{U(\xi, \eta)\} = F^{-1} \{U_1(\xi, \eta)\} + F^{-1} \{U_2(\xi, \eta)\} = \\ &= F^{-1} \{A_1(\xi, \eta) e^{i0}\} + F^{-1} \{A_2(\xi, \eta) e^{+i\pi}\} = a_1(x, y) - a_2(x, y), \end{aligned} \quad (14)$$

то из (13) следует, что исходный объект будет наблюдаться в дифракционных порядках, для которых $(-1)^r = -1$. Это выполняется для $r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. Нас будут интересовать три порядка дифракции, а именно дифракционные порядки $(-1, 0), (0, 0)$ и $(1, 0)$, которые попадают в область главных лепестков массирующих функций $\operatorname{sinc} \left(\frac{\Delta \xi}{2} x \right)$ и $\operatorname{sinc}(\Delta \eta y)$.

Рассмотрим эти порядки.

а) Нулевой дифракционный порядок $(r = 0, s = 0)$. В этом случае

$\tilde{h}_{0,0}(x_0, y_0) = a_1(x_0, y_0) + a_2(x_0, y_0) = F^{-1}\{A_1(\xi, \eta) + A_2(\xi, \eta)\}$. Так как $A_1(\xi, \eta)$ и $A_2(\xi, \eta)$ являются неотрицательными, обратное преобразование Фурье их суммы представляет собой изображение в виде яркого светового пятна. Следовательно, в центре нулевого порядка будет наблюдаться яркое световое пятно большой интенсивности.

б) Дифракционный порядок $(1, 0)$. В этом случае

$$\tilde{h}_{1,0}(x_1, y_0) \sim a_1(x_1, y_0) - a_2(x_1, y_0) = u(x_1, y_0).$$

Следовательно, в дифракционном порядке $(-1, 0)$ восстанавливается исходный объект $u(x, y)$ с точностью до постоянного множителя, но при выполнении допущений (12), которые для данного случая переписутся в виде

$$\left. \begin{array}{l} a) \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\xi}{2}\left(\frac{r}{\Delta\xi} + x_r\right)\right] \approx \operatorname{sinc}\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{const}_1, \\ б) \operatorname{sinc}[\Delta\eta y_0] \approx 1, \\ в) \exp\left(\pm i\frac{\pi}{2}\Delta\xi x_1\right) \approx 1. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Последствия допущений (15,а) и (15,б) легко устраняются путем соответствующего предискажения голографируемого объекта. Последствие не выполнения допущения (15,в) может оказаться значительным.

в) Дифракционный порядок $(-1, 0)$. В том случае имеем то же самое, что и в дифракционном порядке $(+1, 0)$.

Таким образом желаемое изображение можем наблюдать в дифракционных порядках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

2. Согласованная запись

Если обратить внимание на выше приведенный способ записи, то заметим что величины $A_1(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ и $A_2(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$ являются отсчетами функций $A_1(\xi, \eta)$ и $A_2(\xi, \eta)$, взятыми в точках $(n\Delta\eta, m\Delta\eta)$. И записаны они не в точке с координатами $(n\Delta\eta, m\Delta\eta)$, а в точках $\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ и $\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ соответственно. Т.е. имеется “несогласованность” между точками отсчетов и точками записи. Она и является причиной появления множителей, $e^{\pm i\frac{\pi}{2}x}$, к которым проявляется требование в виде допущения (15,в).

Рассмотрим, что случится, если в точках $\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ и $\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ записывать отсчеты функций $A_1(\xi, \eta)$ и $A_2(\xi, \eta)$, взятые не точках $(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$, как это было раньше, а в точках их кодирования, т.е. в точках $\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ и $\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ соответственно. В этом случае в точках $\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ записываются значения $A_1\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$, а в точках $\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ - значения $A_2\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$. Поскольку значения $A_1(\xi, \eta)$ и $A_2(\xi, \eta)$ определяются через значения

$U(\xi, \eta)$, для реализации этого способа необходимо иметь два массива $\{U_{nm}^{(1)}\}$ и $\{U_{nm}^{(2)}\}$, элементы которых равны соответственно

$$U_{nm}^{(1)} = U_1\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right) \text{ и } U_{nm}^{(2)} = U_2\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right). \text{ Допустим, что для всех } (n, m) \text{ вычисли-}$$

ны $U_1\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ и $U_2\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$, и по ним определены $A_1\left(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$ и $A_2\left(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{4}, m\Delta\eta\right)$. И допустим, что по этим значениям записана голограмма, используя схему, которая

приведена на рис. 1,б. В этом случае выражения (4) и (5) для $T_1(\xi, \eta)$ и $T_2(\xi, \eta)$ примут вид

$$T_1(\xi, \eta) = \frac{1}{A_{\max}} \text{rect}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) * \left[A_1(\xi, \eta) \text{comb}_2\left(\frac{\xi + \frac{\Delta\xi}{4}}{\Delta\xi}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) \right],$$

$$T_2(\xi, \eta) = \frac{1}{A_{\max}} \text{rect}_2\left(\frac{\xi}{\Delta\xi/2}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) * \left[A_2(\xi, \eta) \text{comb}_2\left(\frac{\xi - \frac{\Delta\xi}{4}}{\Delta\xi}, \frac{\eta}{\Delta\eta}\right) \right].$$

А вместо выражений (6) и (8) имеем

$$t_1(x, y) \sim \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \text{sinc}(\Delta\eta y) \left\{ a_1(x, y) * \left[\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) \text{comb}_2(\Delta\xi x, \Delta\eta y) \right] \right\} =$$

$$= \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \text{sinc}(\Delta\eta y) \left\{ a_1(x, y) * \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}p} \delta\left(x - p\frac{1}{\Delta\xi}\right) \delta\left(y - q\frac{1}{\Delta\eta}\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \text{sinc}(\Delta\eta y) \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-i)^p a_1\left(x - p\frac{1}{\Delta\xi}, y - q\frac{1}{\Delta\eta}\right) \right],$$

$$t_2(x, y) \sim \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \text{sinc}(\Delta\eta y) \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (i)^p a_2\left(x - p\frac{1}{\Delta\xi}, y - q\frac{1}{\Delta\eta}\right) \right].$$

Суммируя t_1 и t_2 , найдем восстановленное с голограммы изображение для случая *согласованной* записи:

$$\bar{h}(x, y) \sim \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \text{sinc}(\Delta\eta y) \times$$

$$\times \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-i)^p a_1\left(x - p\frac{1}{\Delta\xi}, y - q\frac{1}{\Delta\eta}\right) + (i)^p a_2\left(x - p\frac{1}{\Delta\xi}, y - q\frac{1}{\Delta\eta}\right) \right]. \quad (16)$$

Действуя аналогично, как и в случае несогласованной записи, получим выражение для восстановленного изображения в области произвольно дифракционного порядка (r, s) :

$$\bar{h}_{rs}(x_r, y_s) = \bar{h}\left(\frac{r}{\Delta\xi} + x_r, \frac{s}{\Delta\eta} + y_s\right) \sim \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\xi}{2}\left(\frac{r}{\Delta\xi} + x_r\right)\right] \operatorname{sinc}\left[\Delta\eta\left(\frac{s}{\Delta\eta} + y_s\right)\right] (-i)^r \times \\ \times [a_1(x_r, y_s) + (-1)^r a_2(x_r, y_s)]. \quad (17)$$

Из этого выражения в дальнейшем отбросим стоящий перед открывающейся квадратной скобкой постоянный множитель $(-i)^r$, который не влияет на общий характер распределения комплексной амплитуды, поэтому и являющийся несущественным. Если, так же как и раньше, для области $|x_r| \leq \frac{a_l}{2}$ и $|y_s| \leq \frac{b_l}{2}$ допустим, что

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\xi}{2}\left(\frac{r}{\Delta\xi} + x_r\right)\right] \approx \operatorname{sinc}\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{const}_1, \\ b) \quad & \operatorname{sinc}\left[\Delta\eta\left(\frac{s}{\Delta\eta} + y_s\right)\right] \approx \operatorname{sinc}(s) = \operatorname{const}_2, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

то восстановленное изображение в области дифракционного порядка (r, s) запишется в виде

$$\bar{h}_{r,s}(x_r, y_s) \sim a_1(x_r, y_s) + (-1)^r a_2(x_r, y_s).$$

Отсюда видно, что исходный голографируемый объект будет наблюдаться, как и раньше, в дифракционных порядках (r, s) , для которых $r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

Таким образом, мы пришли к такому же выражению для восстановленного изображения, что и для случая не согласованной записи. Но при соблюдении только двух допущений (18,а) и (18,б), совпадающих с (15,а) и (15,б), последствия которых легко устраняются, предискажением голографируемого объекта. Самым главным, в данном случае, является отсутствие допущения, аналогичного допущению (15,в), несоблюдение которого сильно отражается на качестве восстановленного изображения. Следовательно, мы можем с уверенностью утверждать, что двухамплитудная голограмма с согласованной записью восстанавливает более качественное, чем голограмма с несогласованной записью.

В заключение отметим преимущества предлагаемого в данной статье двухамплитудного метода:

1) при синтезе полутоновой цифровой голограммы симметричных объектов с помощью предлагаемого метода используется половина площади голограммы, тогда как при синтезе методом Ли – лишь четвертая часть, в связи с чем дифракционная эффективность увеличивается в двое по сравнению со случаем использования метода Ли;

2) при синтезе голограммы двухамплитудным методом для кодирования одного отсчета фурье-образа используется лишь два элемента разрешения регистратора голограммы, вместо трех и четырех у методов Беркхарда и Ли соответственно, в связи с чем уменьшается требования к техническим характеристикам устройств регистрации голограммы.

Литература:

1. Lee W. H. Computer-generation of holograms and spatial filters. // Sc. P. diss. M. I. T., Department of Electrical Engineering, Sept., 1969.
2. Lee W. H. Sampled Fourier-transform hologram generated by computer. // « Appl. Opt. », 1970, 9, №3, 639-643.
3. Lee W. H. Filter design for optical data processors. // Pattern Recog., 1970, 2, №5, 127-137.
4. Burchardt C. B. A simplification of Lee's method of generating holograms by computer. // « Appl. Opt. », 1970, 9, №8, 1949.