Омуралиев А.С., Кулманбетова С.

НУЛЕВЫЕ КРАТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

A.S. Omuraliev, S. Kulmanbetova

ZEROMULTIPLE ELEMENTS OFTHE SPECTRUM INA SINGULARLY PERTURBEDPARABOLIC PROBLEM

УДК: 517.928

Построена асимптотика решения двумерного сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае, когда предельный оператор простой структуры имеет кратный нулевой спектр.

The asymptoiics ofsolutionsof two-dimensionalsingularlyperturbed parabolic equationwhen thelimit operatorof simple structurehas a multiplezero-spectrum.

Рассмотрим смешанную задачу

Рассмотрим смешанную задачу

$$L_\varepsilon \equiv \varepsilon\, \partial_\kappa u - L(x,t),\ u = f(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$u\big|_{t=0} = h(x), \quad u\big|_{\Gamma} = 0$

при $\varepsilon \to 0$, где Q= $\Omega\times$ (0,T), область Ω ограничена и имеет гладкую границу Γ, L (x,t) - линейный самосопряженный при каждом $t\in[0,T]$ эллиптический оператор.

Задачу (1) будем решать при следующих предположениях:

1) Оператор L(x,t) является операторам простой структуры и при каждом t є [0,T] имеет спектр $\{\lambda(t)\}$ удовлетворяющий условиям:

$\lambda_k(t) \equiv 0, \forall \kappa=1,2,\dots,p,\ \lambda_{p+1}(t) < \lambda_{p+2} < \dots < 0;$

2) Система собственных функций $\{\psi_k\ (x,t)\}$k=1,2,…p,p+1…, при каждом t образует полную ортонормированную систему функций в некотором гильбертовом пространстве H.

Для регуляризации задачи (1) введем регуляризующие переменные по формулам

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{p+k}(s)\,ds \equiv \frac{\varphi_{p+k}(t)}{\varepsilon},\ k \geq 1 \quad (2)$$

и вместо функции $u(x,t,\varepsilon)$ введем в расмотрению расширенную функцию

$\tilde{u}(M,\varepsilon),\ M = (x,t,\tau), \tau = (\tau_{p+1}, \tau_{p+2}, \dots)$ такую, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)\big|_{\tau=\varphi(t)/\varepsilon} \equiv u(x,t,\varepsilon),\ \ \varphi(t) = (\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \cdots) \tag{3}$$

Принимая во внимание (2), найдем из (3)

$$\partial_t u \equiv \left(\partial_t \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{p+k}(t)\,\partial_{\tau=p+k}\tilde{u}\right)_{\tau=\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}} \tag{4}$$

На основании (1), (3), (4) вместо задачи (1) можно поставить расщиренную задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} \equiv \varepsilon\partial_t \tilde{u}(M,\varepsilon) + D_\lambda \tilde{u}(M,\varepsilon) - L(x,t)\tilde{u}(M,\varepsilon) = f(x,t),\ M \in P, \tag{5}$$

$$\tilde{u}\big|_{t=\tau=0} = h(x), \qquad \tilde{u}(M,\varepsilon)\big|_{\Gamma} = 0 \quad P = Q \times (-\infty, 0), \qquad где\ \ D_\lambda \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{p+k}(t)\,\partial_{\tau_{p+k}};$$

Задача (5) регулярна по ε при $\varepsilon \to 0$ ибо имеет место тождество

$$(\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u})_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon), \tag{6}$$

Решение задачи (5) будем искать в виде

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)=\sum_{i=-1}^{\infty}\varepsilon^i u_i(M) \tag{7}$$

Подставим (7) в (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$T u_{-1} \equiv D_\lambda u_{-1}(M) - L(x,t)u_{-1}(M) = 0,$$
$$T u_0 \equiv D_\lambda u_0(M) - L(x,t)u_0(M) = f(x,t)-\partial_t u_{-1}(M),$$
$$T u_i \equiv D_\lambda u_i(M) - L(x,t)u_i(M) = -\partial_t u_{i-1}(M), \tag{8_{-1}}$$

$$u_{-1}(M)\big|_{t=\tau=0} = 0,\ u_0 M\big|_{t=\tau=0} = L(x),\ u_k(M)\big|_{t=\tau=0} = 0,\ k\geq 1,$$
$$u_{-1}(M)\big|_\Gamma = u_i(M)\big|_\Gamma = 0, i\geq 0,$$

Решение уравнения(8_{-1})определяем в виде

$$u_{-1}(M) = \sum_{k=1}^{p} c_k^{-1}(t)\psi_k(x,t) + \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{p+j}^{-1}\exp(\tau_{p+i})\psi_{p+j}(x,t) \tag{9}$$

Учитивая, что $L(x,t)\psi_k(x,t) = 0,\ \forall k = i,p$ и $L(x,t)\psi_{p+j}(x,t) = \lambda_{p+j}(t)\psi_{p+j},\ j\geq 1$ подставим (9) в уравнение (8_{-1})

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_{p+k}(t)\, c_{p+j,k}^{-1} \exp(\tau_{p+k})\,\psi_{p+j}(x,t) - \sum_{k,j=1}^{\infty} c_{p+j,k}^{-1}(t)\exp(\tau_{p+k})\,\lambda_{p+j}(t)\psi_{p+j}(x,t)$$
$$= \sum_{k,j=1(k\neq j)}^{\infty} c_{p+j,k}^{-1}(t)\exp(\tau_{p+k})\lambda_{p+j}(t)\psi_{p+j}(x,t)$$

Отсюда заключаем, что функция (9) будет решением (8_{-1}) если

$C_{p+j,k}^{-1}(t) = 0,\ \forall j \neq k$,т.е , вместо функции (9) имеем

$$u_{-1}(M) = \sum_{k=1}^{p} c_k^{-1}(t)\psi_k(x,t) + \sum_{j=1}^{\infty} c_{p+j,j}^{-1}(t)\exp(\tau_{p+j})\,\psi_{p+j}(x,t). \tag{10}$$

Здесь $c_k^{-1}(t)$ и $c_{p+j,j}^{-1}(t)$ пока произвольные функции.

Перейдем к следующему интерационному уравнению (8_0). Сначало разложим функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по системе $\{\psi_k(x,t)\}$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\psi_k(x,t),\quad f_k(t) = (f(x,t),\psi_k(x,t))$$

и рассмотрим правую часть уравнения (8_0)

$$F_0(M) = f(x,t) - \partial_t u_{-1}(M) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\psi_k(x,t) - \sum_{k=1}^{p}[\partial_t c_k^{-1}(t)\psi_k + c_k^{-1}(t)\partial_t\psi_k] -$$
$$- \sum_{j=1}^{\infty}[\partial_t c_{p+j,j}^{-1}(t)\psi_{p+j} + c_{p+j,j}^{-1}(t)\,\partial_t\psi_{p+j}(x,t)]\exp(\tau_{p+j}), \tag{11}$$

разложив в ряд Фурье

$$\partial_t\psi_k(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{k,j}(t)\psi_j(x,t),\quad \alpha_{k,j}(t) = (\partial_t\psi_k,\psi_j)$$

перепишем (11)

$$F_0(M)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\psi_k-\sum_{k=1}^{p}[\partial_t c_k^{-1}(t)\psi_k(x,t)+c_k^{-1}(t)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{k,j}(t)\psi_j]-\sum_{j=1}^{\infty}[\partial_t c_{p+j,j}^{-1}(t)\psi_{p+j}$$
$$+C_{p+j,j}^{-1}(t)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{p+j,k}(t)\psi_k(x,t)]\exp(\tau_{p+j}).$$

Или переставляя знаки суммирования , получим:

$$F_0(M)=\sum_{k=1}^{p} f_k(t)\psi_k-\sum_{k=1}^{p}[\partial_t c_k^{-1}(t)+\sum_{j=1}^{p}\alpha_{j,k}(t)c_j^{-1}(t)]\psi_k(x,t)\ +$$
$$+\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} f_{p+k}(t)\psi_{p+k}(x,t)-\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{p}c_j^{-1}(t)\alpha_{j,p+k}(t))\psi_{p+k}(x,t)-\sum_{j=1}^{\infty}[\partial_t c_{p+j,j}^{-1}(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{p+k,j}(t)c_{p+k,k}^{-1}(t)]\exp(\tau_{p+j})\psi_{p+j}(x,t)-\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{\infty}(\exp(\tau_{p+j})c_{p+j,j}^{-1}(t)\alpha_{p+j,k}))\psi_k(x,t),$$

чтобы уравнение (8_0) имело решение потребуем

$$\partial_t c_k^{-1}(t)+\textstyle\sum_{j=1}^{p}\alpha_{j,k}(t)c_j^{-1}(t)=f_k(t),\quad k=\overline{1,p} \tag{12}$$
$$\partial_t c_{p+j,j}^{-1}(t)+\alpha_{p+j,j}(t)c_{p+j,j}^{-1}=0.$$

Тогда правая часть примет вид (13)

$$F_0(M)=\sum_{k=1}^{\infty} f_{p+k}(t)\psi_{p+k}(x,\tau)-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}c_j^{-1}(t)\alpha_{j,k+p}(t)\psi_{p+k}(x,t)-$$
$$-\sum_{k,j=1(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{p+k,j}(t)c_{p+k,k}^{-1}(t)e^{\tau_{p+j}}\psi_{p+j}(x,t)-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}c_{p+j,j}^{-1}(t)\alpha_{p+j,k}(t)e^{\tau_{p+j}}\psi_k(x,t),$$

удовлетворим функцию (10) граничным условием (8_{-1})

$$\sum_{k=1}^{p}c_k^{-1}(t)\psi_k(x,t)\big|_{t=0}+\sum_{j=1}^{\infty}c_{p+j,j}^{-1}(t)\big|_{t=0}\psi_{p+j}(x,t)\big|_{t=0}=0\ .$$
$$\Big(\sum_{k=1}^{p}c_k^{-1}(t)\psi_k(x,t)+\sum_{j=1}^{\infty}c_{p+j}^{-1}(t)\psi_{p+j}(x,t)e^{\tau_{p+j}}\Big)_{\Gamma}=0. \tag{14}$$

Отсюда определим

$$c_k^{-1}(t)\big|_{t=0}=0\ ,\ \ c_{p+j,j}^{-1}(t)\big|_{t=0}=0,\ \ \psi_j(x,t)\big|_{\Gamma}=0\ ,k=\overline{i,p},j\geq 1.$$

решая уравнение (12) при этих начальных условиях, определим

$$c_k^{-1}(t),\ \ k=1,2,\ldots,p;\ \ и\ \ c_{p+j,j}^{-1}(t);\ \ j\geq 1.$$

Решение уравнения (8_0) с правой частью (13) ищем в виде

$$u_0(M)=\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}[c_k^0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}c_{k,p+j}^0(t)\exp(\tau_{p+j})]\psi_k(x,t) \tag{15}$$

и вычислим действия оператора T на функцию (15)

$$Tu_0(M)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{p+k}^0(t)\lambda_{p+k}(t)\psi_{p+k}(x,t)+\sum_{k,j=1}^{\infty}(\lambda_{p+j}(t)-$$
$$-\lambda_{p+k}(t))c_{p+j,p+k}^0 exp(\tau_{p+j})\psi_{p+k}(x,t)+\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\lambda_{p+j}(t)c_{p+j,k}^0(t)\exp(\tau_{p+j})\psi_k(x,t). \tag{16}$$

На основании (13) и (16) заключаем, что функция (15) будет решением (8_0), если выберем $c_i^0(t)$ и $c_{p+j,p+k}^0(t)$ следующим образом:

$$c^0_{p+k}(t) = \frac{1}{\lambda^{(t)}_{p+k}} * [f_{p+k}(t) - \sum_{j=1}^{p} c_j^{-1}(t)\alpha_{j,p+k}(t)],$$

$$c^0_{p+j,p+k}(t) = \frac{\alpha_{p+j,k}(t)c^{-1}_{p+j,j}}{\lambda^{(t)}_{p+j} - \lambda_{p+k}(t)}, \forall k \neq j,\ k,j \geq 1;$$

$$c^0_{p+j,k}(t) = \frac{1}{\lambda_{p+j}(t)}\alpha_{p+j,k}(t)c^{-1}_{p+j,j},\ \ k = \overline{1,p} \tag{17}$$

входящие в (15) функции $c^0_k(t), k = \overline{1,p}$ *и* $c^0_{p+j,p+j}(t), j \geq 1$ произвольны.

Удовлетворим функцию (15) граничным условиям (8_0), для чего разложим

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\,\psi_k(x,0), \quad h_k = (h_k(x), \psi_k(x,0))$$

и подставим в начальное условия для (8_0):

$$\sum_{k=1}^{\infty}[c^0_k(0) + \sum_{j=1}^{\infty} c^0_{k,p+j}(0)]\psi_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\,\psi_k(x,0),$$

отсюда определим

$$c^0_k(0) = -\sum_{j=1}^{\infty} c^0_{k,p+j}(0) + h_k \quad \forall k = \overline{1,p}$$

$$c^0_{p+j,p+j}(0) = h_{p+j} - c^0_{p+j}(0) - \textstyle\sum_{k=1(k\neq j)}^{\infty} c^0_{j,p+k}(0). \tag{18}$$

Вычислим правую часть (8_1)

$$F_1(M) = -\sum_{k=1}^{\infty}[\partial_t c^0_k(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c^0_j(t) + \sum_{j=1}^{\infty}(\partial_t c^0_{k,p+j}(t) + \sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{k,v}(t)\,c^0_{v,p+j}(t))\exp(\tau_{p+j})]\psi_k(x,t)$$

$$= -\{\sum_{k=1}^{p}[\partial_t c^0_k + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c^0_j(t)]\psi_k(x,t)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[\partial_t c^0_{p+k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,p+k}(t)c^0_j(t)]\psi_{p+k}(x,t) + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty}[\partial_t c^0_{k,p+j}(t) + \sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{p+k,v}(t)c^0_{v,p+j}(t)]\exp(\tau_{p+j})\psi_k(x,t)$$

$$+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\partial_t c^0_{p+k,p+k}(t) + \sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{p+k,j}(t)c^0_{v,p+k}(t)]e^{\tau_{p+k}}\psi_{p+k}(x,t) + \sum_{k,j=1(k\neq j)}^{\infty}[\partial_t c^0_{p+k,p+j}(t) +$$

$$+\sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{p+k,j}(t)\,c^0_{v,p+j}(t)]e^{\tau_{p+j}}\psi_{p+k}\}.$$

Обеспечивая разрешимость уравнения (8_1), положим

$$\partial_t c^0_k(t) + \sum_{j=1}^{p}\alpha_{j,k}(t)\,c^0_j(t) = -\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{p+j,k}(t)c^0_{p+j}(t), \quad k = \overline{1,p}$$

$$\partial_t c^0_{p+k,p+k}(t) + \alpha_{p+k,p+k}(t)\,c^0_{p+k,p+k}(t) = -\textstyle\sum_{v=1(v\neq p+k)}^{\infty}\alpha_{p+k,v}(t)\,c^0_{v,p+k}(t), \qquad k \geq 1 \tag{19}$$

Эти уравнения решаем при начальных условиях (18), здесь правые части известные функции определенные формулами (17).

Согласно (19) правая часть $F_1(M)$ примет вид:

$$F_1(M) = -\sum_{k=1}^{\infty}[\partial_t c^0_{p+k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,p+k}(t)c^0_j(t)]\psi_{p+k}(x,t)$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty}[\partial_t c_{k,p+j}^0(t)+\sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{p+k,v}(t)c_{v,p+j}^0(t)]\exp(\tau_{p+j})\psi_k(x,t)-$$

$$-\sum_{k,j=1(k\neq j)}^{\infty}[\partial_t c_{p+k,p+j}^0(t)+\sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{p+k,v}(t)c_{v,p+j}^0(t)]\exp(\tau_{p+j})\psi_{p+k}(x,t) \quad (20)$$

Уравнения (8_1) с такой правой частью имеет решение представимое в виде (15) с верхим индексом 1 вместо 0. Действительно, вычисляя действие оператора T на функцию $u_1(M)$ получим:

$$Tu_1=-\sum_{k=1}^{\infty}c_{p+k}^1(t)\lambda_{p+k}(t)\psi_{p+k}(x,t)+\sum_{k,j=1}^{\infty}(\lambda_{p+k}(t)-$$

$$-\lambda_{p+j}(t))c_{p+j,p+k}^1(t)\exp(\tau_{p+j})\psi_{p+k}(x,t)-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\lambda_{p+j}(t)\,c_{p+j,k}^1(t)\exp(\tau_{p+j})\psi_k(x,t)$$

Сравнивая с правой частью заключаем, что уравнение удовлетворится при выборе функций $c_{p+k}^1(t)$ и $c_{i,j}^1(t)$ следующим образом :

$$c_{p+k}^1(t)=\lambda_{p+k}^{-1}(t)[\partial_t c_{p+k}^0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,p+k}(t)c_j^0(t)],\quad k=\overline{1,p},$$

$$c_{p+j,k}^1(t)=\lambda_{p+k}^{-1}(t)[\partial_t c_{k,p+j}^0(t)+\sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{p+k,v}(t)c_{v,p+j}^0(t)]\ ,k=\overline{1,p},j\geq 1$$

$$c_{p+j,p+k}^1(t)=(\lambda_{p+k}-\lambda_{p+j})^{-1}[\partial_t c_{p+k,p+j}(t)+\sum_{v=1}^{\infty}\alpha_{p+k,v}(t)c_{v,p+j}^0(t)],\qquad k\neq j,\qquad k,j\geq 1$$

Далее повторяя вышеописанный процесс, определим все коэффициенты частичной суммы ряда (7). Сужение этой частичной суммы посредством регулирующих функций $\tau=\varphi(t)/\varepsilon$ будет асимптотическим решением исходной задачи (1), т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема *Пусть выполнены условия 1)-2). Тогда сужение частичной суммы ряда (7), полученным вышеописанным методом, при* $\tau=\varphi(t)/\varepsilon$ *является асимптотическим решением при* $\varepsilon\to 0$ *задачи (1), т.е. для достаточно малых и* $\forall\ i=-1,0,1,\dots,n$ *справедлива оценка*

$$\left|u(x,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon n}(x,t,\varphi(t/\varepsilon)\right|<c\varepsilon^{n+1}.$$

Доказательство данной теоремы проводится аналогично [2].

Литература:

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущенний М.: наука, 1981.
2. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Рафатов Р.