

Байманкулов А.Т.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА
ДИФФУЗИИ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

A. T. Baymankulov

ALGORITHM FOR CALCULATING THE DIFFUSION COEFFICIENT APPROXIMATE
GROUND WATER

УДК: 519.62:624.131

В работе изучается система атмосфера - ненасыщенная зона - грунтовая вода. Движение воды в системе имеет непрерывный характер. Условия на границе подсистемы атмосфера и ненасыщенная зона, т.е. поверхность почвы, описывает движения воды в ненасыщенной зоне почвенного профиля.

In this paper we study the system atmosphere - the unsaturated zone - ground water. The movement of water in the system has a continuous character. The conditions at the boundary subsystem atmosphere and the unsaturated zone, ie the soil surface, describes the movement of water in the unsaturated zone of the soil profile.

1. Постановка задачи.

В работе изучается система атмосфера – ненасыщенная зона – грунтовая вода. Движение воды в системе имеет непрерывный характер. Условия на границе подсистемы атмосфера и ненасыщенная зона, т.е. поверхность почвы, описывает движения воды в ненасыщенной зоне почвенного профиля.

Теория движения воды в почве при изотермических условиях для ненабухающих и недеформирующихся грунтов основано на закон Букингема /1/, которое выражает связь между потоком и градиентом потенциала переноса. Аналитическая запись закона Букингема записано в виде $q = -D \frac{\partial W}{\partial z} - K$ Ричардсоном /2/ и Чайло-сом /3/. Здесь - коэффициент диффузии влаги, q - удельный поток воды, K - коэффициент гидравлической проводимости почвы, W - влажность грунта. Уравнение неразрывности для ненасыщенного потока можно представит в виде /4/

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad (1)$$

В начальный момент задается распределение влаги:

$$W(z,0) = W_0(z)$$

На границе поверхности почвы и атмосферы задается граничное условие второго рода

$$\frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = A(t)$$

На границе грунтовых вод с почвой задается первое граничное условие

$$W(0,t) = W_1 = const$$

Чтобы найти $D(z)$ мы должны ставить дополнительное условие. В нашем случае это влага на поверхности почвы

$$W(H,t) = W_g(t), t \in [0, T]. \quad (2)$$

Введем новую функцию $W(z, t) = \overline{W}(z, t) - W_1 - zA(t)$. Найдем производные и подставляем в (1). Функцию $\overline{W}(z, t)$ снова обозначим через $W(z, t)$. Тогда получится следующая задача

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial W}{\partial z} \right) - A(t) \frac{\partial D(z)}{\partial z} + f(z, t) \quad (3)$$

$$W(0, t) = 0, \quad \frac{\partial W(H, t)}{\partial z} = 0, \quad W(z, 0) = W_0(z) \quad (4)$$

Задача (3)-(4) в области $Q = (0, H) \times (0, T)$ при заданном $D(z)$ имеет единственное устойчивое решение /5/. Методика решения обратной задачи кондуктивного распространения температуры разработана в работах /6, 7/, а общая схема определения коэффициента диффузии на дифференциальном уровне изучена в работе /8/. В настоящей работе доказываются сходимость прямой и сопряженной разностной задачи полученные при определении коэффициента диффузии $D(z)$ /9/.

2. Разностные задачи.

В дискретной области $Q_N^m = \{z_i = i \cdot \Delta z, t_j = j \cdot \Delta t \mid N \cdot \Delta z = H; m \cdot \Delta t = T\}$ ищется решение задачи

$$Y_i^{j+1} = \left(D(z_{i-1}) Y_{\bar{z}}^{j+1} \right)_z + A^{j+1} D_{i,z} + \varphi_i^{j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5)$$

$$Y_0^j = 0, \quad Y_{N,\bar{z}}^j = 0, \quad Y_i^0 = W_0(z_i) \quad (6)$$

В работе /9/ из (6)-(7) получена сопряженная задача

$$U_i^{j+1} + \left(D_n(z_{i+1}) U_{i,z}^j \right)_{\bar{z}} = 0 \quad (7)$$

$$U_i^m = 0, \quad U_0^j = 0, \quad D_n(z_{N-1}) U_{N,\bar{z}}^j = 2(Y_N^{j+1} - U_g(t_{j+1})) \quad (8)$$

3. Расчетная схема.

1. Задается начальное значение $D_n, n = 0$.
2. Задаются $W_0(z), 0 \leq z \leq H; W_1(t), 0 \leq t \leq T; A(t) \in [0, T]$.
3. Решается прямая задача (5)- (6).
- 3.1 Вычисляются коэффициенты трехточечной разностной схемы

$$A_i = \frac{D(z_i) \Delta t}{(\Delta z)^2}, \quad C_i = \frac{D(z_{i-1}) \Delta t}{(\Delta z)^2}, \quad B_i = A_i + C_i + 1,$$

$$F_i^j = Y_i^j + \Delta t f(z_i, t_j) + \Delta t (D(z_i))_x, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

$$3.2 \quad Y_i^0 = W_0(z_i), \quad i = \overline{0, N}.$$

3.3 Значения коэффициента скалярной прогонки:

$$\alpha_{i+1} = \frac{C_i}{B_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i + \beta_i + F_i^j}{B_i - A_i \alpha_i}; i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0$$

3.4. Вычисляется значение Y_N^{j+1} на поверхности земли.

$$Y_N^{j+1} = \frac{\beta_N}{1 - \alpha_N}$$

3.5. Используя рекуррентную формулу

$$Y_{i-1}^{J+1} = \alpha_i Y_i^{J+1} + \beta_i, \quad i = N, N-1, \dots, 2$$

определяется вертикальное распределение влаги.

3.6. Вычисляются коэффициенты потоковой прогонки.

$$\bar{\alpha}_i = A_i \alpha_i - 1, \quad A_i = \frac{\Delta t D(z_i)}{(\Delta z)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

3.7. Определяется значение потока влаги на поверхности почвы.

$$P_{N-1} = 0$$

3.8. Поток влаги вычисляются по формуле

$$P_{i-1}^{J+1} = \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_i - 1} P_i^{J+1} + \frac{A_i \beta_i + F_i \bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_i - 1}$$

$$i = N-1, N-2, \dots, 1$$

4. Решается сопряженная задача (7)- (8)

4.1. Для $j = m$, положим

$$U_i^m = 0, \quad i = \overline{0, N}.$$

$$4.2 \quad A_i = \frac{\Delta t D(z_i)}{(\Delta z)^2}, \quad B_i = A_i + A_{i+1} + 1,$$

$$F_i^{J+1} = U_i^{J+1}$$

4.3. Начальные значения коэффициенты прогонки $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$.

4.4. Рекуррентно вычисляются коэффициенты

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_{i+1}}{\beta_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i^{J+1}}{B_i - A_i \alpha_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

4.5. Граничное значение переменной потока U вычисляется по формуле.

$$\bar{P}_{N-1}^J = -2A_{N-1} \frac{\Delta z}{D(z_N)} \cdot (Y_N^{J+1} - W_1^{J+1})$$

4.6. Поток сопряженной задачи для $i = N-1, N-2, \dots, 1$ вычисляются по формуле

$$\bar{P}_{i-1}^J = \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_i - 1} \bar{P}_i^J + \frac{A_i \beta_i + F_i^{J+1} \bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_i - 1}$$

5. Вычисление коэффициента капиллярной диффузии $D_{n+1}(z)$.

5.1. вычисляются разностные производные $Y_{\bar{z}}$ и $U_{\bar{z}}$:

$$Y_{\bar{z}}^{J+1} = -\frac{P_{i-1}^{J+1}}{\Delta z A_{i-1}}, \quad U_{\bar{z}}^J = -\frac{\bar{P}_{i-1}^J}{\Delta z A_{i-1}};$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad A_i = \frac{D_n(z_i) \Delta t}{(\Delta z)^2}.$$

5.2. Следующее приближение коэффициента капиллярной диффузии вычисляется по формуле

$$D_{n+1}(z) = D_n(z) + \sum_{J=0}^{m-1} \beta Y_{\bar{z}}^{J+1} U_{\bar{z}}^J \Delta t$$

6. Вычисляется функционал

$$J(D_{n+1}) = \sum_{j=0}^{m-1} (Y_N^{j+1} - W_g^{j+1})^2 \Delta t$$

7. Если $\left| \frac{J(D_{n+1}) - J(D_n)}{J(D_{n+1})} \right| < \varepsilon,$

то функция $D_{n+1}(z)$ принимается за значение коэффициента капиллярной диффузии с точностью ε .

Литература:

1. Buckingham E. Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.
2. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through medians. - Physics, 1931, vol. 1, p.318-333.
3. Childs E.D. The transport of water through heavy clay soils. I, III. - j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.
4. Нерпин СВ., Юзefович Г.й. О расчете нестационарного движения влаги в почве// Докл. ВАСХНИЛ, №6,1966.
5. Тиханов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1996, 724 с.
6. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.
7. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О. Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний// Вестник НАН РК. 2008. -№2. - С. 7-9.
8. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде // Вестник НАН РК. 2008.-№2. - С. 7-9.
9. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coefficient of soil water. // International Journal of Academic Research, № 5,2010.
10. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т. Определение коэффициента влагопроводности почвы с учетом изменения температуры// Вестник ВКГТУ им. Д.Серикбаева,2010, №2, с. 130-134.
11. Рысбайулы Б., Биртаева З.Б. Сходимость итерационного процесса для определения коэффициента теплопроводности многослойного грунта с учетом конвекции влаги// ДАН НАН РК,2010, №4, с. 37-41.
12. Акишев Т.Б., Рысбайулы Б. Вариационно-разностная схема для определения коэффициента теплоемкости однородного грунта// Вестник КБТУ, 2009, №1(8), С.42-45.
13. Рысбайулы Б., Акмолдина А.И. Приближенный метод определения коэффициента пьезопроводности пласта при упругом режиме добычи нефти// Вестник КБТУ, 2009, №1(8), ст. 58-62.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Жэналиев М.А.