ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА № 6, 2017

Канетова Д.Э.

ТОПОЛОГИЯЛЫК ГРУППАЛАРДЫН μ - ТОЛУКТУУЛУГУ

Канетова Д.Э.

О μ - ПОЛНОТЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

D.E. Kanetova

ABOUT μ - COMPLETENESS OF TOPOLOGICAL GROUPS

УДК: 515.12

Бул илимий макалада топологиялык группалардын μ -толуктуулугу изилденет. Каалагандай сандагы Вейль боюнча μ -толук группалардын көбөйтүндүсү Вейль боюнча μ -толук болоору далилденген. μ -жеткилең чагылдырууларда бир калыптуу мейкиндиктин μ -толуктуулугу прообраз тарабына, ал эми предкомпактуу гомоморфизмде μ -толуктуулук образ тарабына сакталышы тургузулган.

Негизги сөздөр: *бир калыптуу мейкиндик, топологиялык группа, μ -толуктуулук, бир калыптуу жабдуу.*

В настоящей статье изучаются μ -полнота топологических групп. Доказано, что произведение любого числа μ - полных по Вейлю групп μ -полно по Вейлю. Установлено, что при μ -совершенных отображениях μ -полнота равномерных пространств сохраняется в сторону прообраза, а при предкомпактных гомоморфизмах μ -полнота сохраняется в сторону образа.

Ключевые слова: *равномерное пространство, топологическая группа, μ -полнота, равномерное покрытие.*

In this paper we study μ -the completeness of topological groups. It is proved that the product of any number μ - completeness on Weil μ -complete groups is complete in the sense of Weil. It is established that under completed μ -mappings μ - completeness of uniform spaces is preserved in the direction of the preimage, and under μ -precompact homomorphisms μ - completeness is preserved in the direction of the image.

Key words: *uniform space, topological group, μ -completeness, uniform covering.*

В данной статье все топологические пространства предполагаются тихоновскими, равномерные пространства отделимыми, отображения равномерно непрерывными.

Напомним, что равномерное пространство (X,U) называется μ -полным, если всякий фильтр Коши имеющий базу мощности $\leq \mu$ сходится в нем. При $\mu \leq \aleph_0$, μ -полнота называется секвенциально полной. Этот класс равномерных пространств было введено А.А. Борубаевым [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топологическая группа G называется μ -полной по Вейлю, если ее правая и левая равномерные структуры являются структурами μ -полного пространства.

Легко видеть, что топологическая группа была μ -полна по Вейлю, достаточно, чтобы одна из ее равномерных структур была структурой μ -полного пространства.

Топологическая группа G называется секевенциально полной по Вейлю, если ее правая и левая равномерные структуры являются структурами секвенциально полного пространства. Также, легко видеть, что топологическая группа была секвенциально полна по Вейлю, достаточно, чтобы одна из ее равномерных структур была структурой секвенциально полного пространства.

ЛЕММА 1. Пусть $f:(X,U)\rightarrow(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение. Если N - база фильтра Коши в (X,U) мощности $\leq \mu$, то $fN=\{fB:B\in N\}$ является базой фильтра Коши в (Y,V) мощности $\leq \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in U$. Тогда $f^{-1}\beta \in U$. Пусть F - фильтр Коши в (X,U) имеющая базу N мощности $\leq \mu$. Тогда $f^{-1}\gamma \cap F=\varnothing$ т.е. найдется $\Gamma \in \gamma$ такое, что $f^{-1}\Gamma \in F$. Следовательно, найдется $B\in N$ такое, что $B\subset f^{-1}\Gamma$ т.е. $fB\subset \Gamma$. Пусть $F'=\{A\subset Y:$ найдется такое $C\in B$, что $fC\subset A\}$. Тогда F' - фильтр в (Y,V). Легко видеть, что F' является фильтром Коши в (Y,V) имеющая базу fN мощности $\leq \mu$.

ТЕОРЕМА 1. Произведение любого числа μ-полных по Вейлю групп μ-полно по Вейлю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, в произведении семейства $\{G_a : a \in M\}$ топологических групп правая (левая) равномерная структура есть произведение правых (левых) равномерных структур групп G_a. Поэтому доказательство проведем для правой равномерной структуры. Аналогичные результаты имеют место для равномерной структуры. Пусть $(G, U^r) = \prod\limits_{a \in M} (G_a, U^r_a)$ - произведение семейства μ-полных правых равномерных структур $\{(G_a, U^r_a) : a \in M\}$, а F - фильтр Коши в (G, U^r) имеющий базу B мощности $\le \mu$. Положим $B_a = P_a(B)$, где $P_a : G \to G_a$. По лемме 1 B_a база мощности $\le \mu$ фильтра Коши F_a в (G_a, U^r_a). Так как правая равномерная структура (G_a, U^r_a) μ-полна, то фильтр Коши F_a сходится к некоторой точке x_a пространств (G_a, U^r_a). Покажем, что фильтр Коши F в (G, U^r) имеющий базу B мощности $\le \mu$ сходится к точке $x = \{x_a\}$, $a \in M$. Пусть V окрестность единицы. Тогда Vx окрестность точки x в (G, τ). Положим $Vx = Vx_{a_1} \times Vx_{a_2} \times ... \times Vx_{a_n} \times \prod \{G_a : a \in M \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\}\}$, где Vx_{a_i} - окрестность точки x_{a_i} в (G_{a_i}, τ_{a_i}), $i = 1, 2, ..., n$. $Vx = \bigcap\limits_{i=1}^{n} P^{-1}_{a_i} Vx_{a_i} \in F$, так как $Vx_{a_i} \in F_{a_i}$. Следовательно, произведение $\prod\limits_{a \in M} (G_a, U^r_a)$ μ-полно по Вейлю.

СЛЕДСТВИЕ 1. Всякое произведение секвенциально полных по Вейлю групп секвенциально полно по Вейлю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякая полная по Вейлю группа μ-полна по Вейлю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G - полная группа по Вейлю. Пусть F - произвольный фильтр Коши имеющий базу мощности $\le \mu$. Тогда он сходится к некоторой точке $x \in G$. Следовательно, группа G μ - полна по Вейлю.

СЛЕДСТВИЕ 2. Всякая полная по Вейлю группа секвенциально полна по Вейлю.

ЛЕММА 2. Пусть (X, U) - равномерное пространство веса μ. Если (X, U) - μ-полно, то оно полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство (X, U) μ-полно и F - произвольный фильтр Коши в (X, U). Тогда существует минимальный фильтр Коши F_0 такой, что $F_0 \subset F$. Покажем, что минимальный фильтр Коши F_0 имеет базу мощности $\le \mu$. Так как равномерное пространство (X, U) имеет вес μ, то существует база B равномерности U мощности $\le \mu$. Положим $A = \{\alpha(L) : \alpha \in B\}$, где L - фиксированный элемент F_0. Тогда легко видеть, что семейство A - образует базу фильтра Коши F_0 и оно имеет мощности $\le \mu$. Так как (X, U) μ-полно, то F_0 сходится к некоторой точке $x \in X$. Поэтому F тоже сходится к этой точке $x \in X$. Следовательно, (X, U) полно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G - топологическая группа веса μ. Если G μ-полно по Вейлю, то G полно по Вейлю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G - топологическая группа счетного веса. Если G секвенциально полно по Вейлю, то G полно по Вейлю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Топологическая группа G называется μ-полной по Райкову если ее двусторонняя равномерная структура является структурой μ-полного пространства.

Топологическая группа G называется секвенциально полной по Райкову если ее двусторонняя равномерная структура является структурой секвенциально полного пространства.

ТЕОРЕМА 2. Всякое произведение μ-полных по Райкову групп μ-полно по Райкову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательство теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 4. Всякое произведение секвенциально полных по Райкову групп секвенциально полно по Райкову.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Всякая полная по Райкову группа μ-полна по Райкову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательство предложение 2.

СЛЕДСТВИЕ 5. Всякая полная по Райкову группа секвенциально полна по Райкову.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G - топологическая группа веса μ. Если G μ-полно по Райкову, то G полно по Райкову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть G - топологическая группа счетного веса. Если G секвенциально полна по Райкову, то G полна по Райкову.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если топологическая группа G μ-полна по Вейлю, то она μ-полна по Райкову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F- произвольный фильтр Коши в (G,U_T) имеющий базу мощности $\leq \mu$. Тогда F - фильтр Коши и в (G,U_R). В самом деле, если $\alpha \in U_R$, то $\alpha \in U_T$. Ясно, что $\alpha \cap F \neq \varnothing$. Так как (G,U_R) μ-полно, т.е. группа G μ-полно по Вейлю, то F сходится в G. Следовательно, (G,U_T) μ-полно, т.е. группа G μ-полно по Райкову.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если топологическая группа G секвенциально полно по Вейлю, то она секвенциально полна по Райкову.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: G \to G'$ - непрерывный предкомпактный гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу G'. Тогда, если G μ-полно, то G' тоже μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - произвольный фильтр Коши в (G',V_R) имеющий мощности $\leq \mu$. Тогда $f^{-1}F$ является фильтром в G. Пусть η ультрафильтр содержащий фильтр $f^{-1}F$. Докажем, что η является фильтром Коши. Пусть α - произвольное равномерное покрытие. Тогда существуют такие покрытие $\beta \in V_R$ и конечное покрытие $\gamma \in U_R$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Так как F фильтр Коши в (G',V_R) имеющий мощности $\leq \mu$, то $\beta \cap F \neq \varnothing$ т.е. существует $B \in \beta$ такой, что $B \in F$. Ясно, что $f^{-1}B \in \eta$. Так как η ультрафильтр и $f^{-1}B = \bigcup_{i=1}^{n}(f^{-1}B \cap \Gamma_i)$, $\Gamma_i \in \gamma$, $i = 1,2,...,n$, то существует $k \leq n$, что $f^{-1}B \cap \Gamma_k \in \eta$. Далее из $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ следует, что $f^{-1}B \cap \Gamma_k \subset A$, $A \in \alpha$, а из свойства ультрафильтра следует $A \in \eta$. В силу μ-полноты пространства (G,U_R) фильтр Коши η сходится к некоторой точке $x \in G$. Следовательно, фильтр Коши F в (G',V_R) имеющий мощности $\leq \mu$, сходится к точке $fx \in G'$. Значит, (G,V_R) μ-полно.

Напомним, что тихоновское пространство X называется μ-компактным, если каждое его открытое покрытие мощности $\leq \mu$ содержит конечное подпокрытие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Тихоновское пространство X μ-компактно тогда и только тогда, когда для любой равномерности U в X, согласующихся с топологией пространства X, равномерное пространство (X,U) μ-полно.

СЛЕДСТВИЕ 8. Тихоновское пространство X счетно компактно тогда и только тогда, когда для любой равномерности U в X, согласующихся с топологией пространства X, равномерное пространство (X,U) секвенциально полно.

Отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространства (Y,V) называется равномерно μ-совершенным, если отображение f замкнуто и все подмножества $f^{-1}x$, $x\in X$, μ-полны относительно равномерности U.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространства (Y,V) является равномерно μ-совершенным, то из μ-полноты равномерного пространства (X,U) следует μ-полнота равномерного пространства (Y,V).

СЛЕДСТВИЕ 9. Если отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространства (Y,V) является совершенным, то из μ-полноты равномерного пространства (X,U) следует μ-полнота равномерного пространства (Y,V).

Отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространства (Y,V) называется равномерно секвенциально совершенным, если отображение f замкнуто и все подмножества $f^{-1}x$, $x\in X$, секвенциально полны относительно равномерности U.

СЛЕДСТВИЕ 10. Если отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространства (Y,V) является равномерно секвенциально совершенным, то из секвенциально полноты равномерного пространства (X,U) следует секвенциальной полнота равномерного пространства (Y,V).

Отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространства (Y,V) называется совершенным, если отображение $f:(X,\tau_U)\to(Y,\tau_V)$ топологического пространства (X,τ_U) на топологическое пространство (Y,τ_V) является совершенным отображением.

СЛЕДСТВИЕ 11. Если отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространства (Y,V) является совершенным, то из секвенциальной полноты равномерного пространства (X,U) следует секвенциальная полнота равномерного пространства (Y,V).

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990.
2. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек: Илим, 2013.

Рецензент: д.ф.-м.н., академик НАН КР Борубаев А.А.