МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А.

КҮЧТҮҮ БИР КАЛЫПТУУ B-ПАРАКОМПАКТУУ МЕЙКИНДИКТЕР

Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А.

О СИЛЬНО РАВНОМЕРНО B-ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

B.E. Kanetov, N.A. Baigazieva

ABOUT A STRONGLY UNIFORMLY B-PARACOMPACT SPACE

УДК:515.12

Макалада күчтүү паракомпактуу мейкиндиктердин бир калыптуу аналогдору изилденген. А.А. Борубаевдин «кайсыл бир калыптуу мейкиндиктер каалагандай чектүү аддитивдүү ачык ω жабдуу үчүн кандайдыр бир күчтүү паракомпактуу метризацияланган мейкиндикке карата ω-чагылдырууга ээ болушат?» деп коюлган маселеси чечилген.

Негизги сөздөр: *бир калыптуу мейкиндик, күчтүү бир калыптуу В-паракомпактуу мейкиндик, чектүү аддитивдүү жабдуу.*

В статье исследован равномерный аналог сильно паракомпактных пространств. Решена задача поставленная А.А.Борубаевым «каковы те равномерные пространства, которые обладают равномерно непрерывным ω-отображением на некоторое сильно паракомпактное метризуемое равномерное пространство, для любого конечно аддитивного открытого покрытия ω ?».

Ключевые слова: *равномерное пространство, сильно равномерно В-паракомпактное пространство, конечно аддитивное покрытие.*

There are a uniform analogy of the strongly paracompact space where are studied. Problem set by the Borubaev A.A., specifically "what are uniform spaces which have uniformly continuous ω-mapping on strongly paracompact metric uniform space for any open finitely-additive covering ω ?" being solved.

Key words: *uniform space, strongly uniformly B-paracompact space, finitely-additive covering.*

Равномерное пространство (X,U) называется сильно равномерно B-паракомпактным, если оно является равномерно B-паракомпактным (т.е. равномерно паракомпактно в смысле А.А. Борубаева) (см. [1], стр. 83, опр. 1.3.1) и его топологическое пространство (X,τ_U) является сильно паракомпактным пространством.

Ясно, что всякое сильно равномерно B-паракомпактное пространство является равномерно B-паракомпактным, а обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякое сепарабельное метризуемое равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) - сепарабельно метризуемое равномерное пространство. Тогда равномерное пространство (X,U) имеет счетную базу B, состоящую из счетных покрытий. Легко видеть, что для любого конечно аддитивного открытого покрытия β пространства (X,U) последовательность счетных покрытий $\{\alpha_n : n\in N\}\subset U$ удовлетворяет условию (ВР) (см. [1], стр.84). Также, легко видеть, что пространство (X,τ_U) является Линделёфовым т.е. сильно паракомпактным пространством. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если (X,U) - сильно равномерно B-паракомпактно, то его топологическое пространство (X,τ_U) сильно паракомпактно. Обратно, если (X,τ)- сильно паракомпактное топологическое пространство, то равномерное пространство (X,U_X) сильно равномерно B-паракомпактно, где U_X - универсальная равномерность пространства X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что (X,τ_U) сильно паракомпактно. Обратно, пусть (X,τ) - сильно паракомпактное топологическое пространство. Легко видеть, что семейство всех открытых покрытий образует базу универсальной равномерности U_X паракомпактного пространства (X,τ). Следовательно, равномерное пространство (X,U_X) является сильно равномерно B-паракомпактным пространством.

В следующей теореме решается задача поставленная А.А. Борубаевым: каковы те равномерные пространства, которые обладают равномерно непрерывным ω-отображением на некоторое сильно паракомпактное метризуемое равномерное пространство, для любого конечно аддитивного открытого покрытия ω.

ТЕОРЕМА 1. Равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным тогда и только тогда, когда для каждого конечно аддитивного открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω -отображение f равномерного пространства (X,U) на некоторое сильно паракомпактное метризуемое равномерное пространство (Y,V) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть (X,U) - сильно равномерно B-паракомпактное пространство и ω - конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда для ω существует нормальная последовательность равномерных покрытий $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условию: для каждой точки $x\in X$ существуют номер $n\in N$ и $O\in\omega$ такие, что $\alpha_n(x)\subset O$. Для нормальной последовательности равномерных покрытий $\{\alpha_n\}$, существует такая псевдометрика d на X, что $\alpha_{n+1}(x)\subset\{y: d(x,y)<\frac{1}{2^{n+1}}\}\subset\alpha_n(x)$, для любых $x\in X$ и $n\in N$. Для любых $x,y\in X$ $x\sim y$ тогда и только тогда, когда $d(x,y)=0$. Пусть Y - фактор-множество множества X, $f: X\to Y$ отображение множества X в фактор-множества Y. На фактор-множестве Y метрику определим следующим образом: для любых точек $y_1,y_2\in Y$ положим $\rho(y_1,y_2)=d(f^{-1}y_1,f^{-1}y_2)$. Ясно, что метрика ρ индуцирует равномерность V на Y. Легко видеть, что (Y,τ_V) является сильно паракомпактным пространством.

Достаточность. Пусть для каждого конечно аддитивного открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω -отображение f равномерного пространства (X,U) на некоторое сильно паракомпактное метризуемое равномерное пространство (Y,V) . Покажем, что равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным. Пусть ω - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие равномерного пространства (X,U) и f - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на сильно паракомпактное метризуемое равномерное пространство (Y,V). Тогда существует последовательность равномерных покрытий $\{\beta_n\}$ пространства (Y,V). Положим $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n=f^{-1}\beta_n$. Ясно, что $\{\alpha_n\}$ является последовательности равномерных покрытий пространства (X,U). Покажем, что для каждой точки $x\in X$ существуют номер $n\in N$ и $O\in\omega$ такие, что $\alpha_n(x)\subset O$. Пусть $x\in X$ - произвольная точка. Тогда существует $O_x\in\omega$ такое, что $O_x\ni x$. В силу открытости множества O_x найдется такой номер $n\in N$, что $\alpha_n(x)\subset O_x$. Теперь докажем, что (X,τ_U) сильно паракомпактное пространство. Для этого достаточно показать, что в конечно аддитивное открытое покрытие ω можно вписать звездно конечное открытое покрытие. Так как отображение f является ω - отображением, то всякая точка $y\in Y$ имеет окрестность O_y, прообраз $f^{-1}O_y$ которой содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω. Положим $\{O_y: y\in Y\}$. Ясно, что оно является открытым покрытием пространства (Y,τ_V). В него впишем звездно конечное открытое покрытие β. Легко видеть, что звездно конечное открытое покрытие $f^{-1}\beta$ вписано в покрытие ω т.е. пространство (X,τ_U) является сильно паракомпактным. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Замкнутое подпространство (M,U_M) сильно равномерно B-паракомпактного пространства (X,U) сильно равномерно B-паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α_M - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие подпространства (M,U_M). Тогда существует конечно аддитивное открытое семейство α' пространства (X,U) такое, что $\alpha_M = \alpha' \wedge \{M\}$. Положим $\alpha = \{\alpha', X \setminus M\}$. Ясно, является конечно аддитивным открытым покрытием пространства (X,U) и в силу его сильно равномерно B-паракомпактности для α существует нормальная последовательность равномерных покрытий $\{\beta_n\}$, удовлетворяющая условию: для каждой точки $x \in X$ существуют номер $n \in N$ и $A \in \alpha$ такие, что $\beta_n(x) \subset A$. Положим $\{\beta_n^M\}$, где $\beta_n^M = \beta_n \wedge \{M\}$. Ясно, что $\{\beta_n^M\}$ есть последовательность равномерных покрытий пространства (M,U_M). Легко видеть, что для каждой точки $x \in M$ существуют номер $n \in N$ и $A_M \in \alpha_M$ такие, что $\beta_n^M(x) \subset A_M$. Следовательно, (M,U_M) является сильно равномерно B-паракомпактным.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое компактное равномерное пространство сильно равномерно B-паракомпактно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любое равномерно локально компактное пространство (X,U), топологическое пространство (X,τ_U) которого сильно паракомпактно, является сильно равномерно B-паракомпактным.

Напомним [2], что равномерное пространство (X,U) называется равномерно локально компактным, если существует равномерное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Всякое равномерно локально компактное пространство сильно равномерно B-паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство (X,U) является локально компактным. Тогда топологическое пространство (X,τ_U) локально компактно и паракомпактно т.е. сильно паракомпактно. Так как любое равномерно локально компактное пространство является равномерно B-паракомпактным, то равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X,U) - равномерное пространство, cX - некоторое компактное хаусдорфово расширение пространства (X,τ_U). Равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. для любого компакта $K \subset cX \setminus X$ существует последовательность равномерных покрытий $\{\alpha_i\}$, удовлетворяющая условию: для каждой точки $x \in X$ существует номер $i \in N$ такой, что $[\alpha_i(x)]_{cX} \cap K = \varnothing$.

2. для любого компакта $K \subset cX \setminus X$ существует звездно конечное открытое покрытие α пространства (X,τ_U) такое, что $[A]_{cX} \cap K = \varnothing$ для любого $A \in \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть (X,U) - сильно равномерно B-паракомпактное пространство, cX - некоторое компактное хаусдорфово расширение пространства (X,τ_U) и $K \subset cX \setminus X$ - произвольный компакт. Через γ обозначим множество всех открытых подмножеств Γ компакта cX, что $[\Gamma]_{cX} \cap K = \varnothing$. Положим $\beta = \{\Gamma \cap X : \Gamma \in \gamma\}$. Легко показать, что β является конечно аддитивным открытым покрытием пространства (X,U). Тогда существует последовательность равномерных покрытий $\{\alpha_i\}$, такая, что для каждой точки $x \in X$ существуют номер $i \in N$ такой, что $\alpha_i(x) \subset \Gamma \cap X$ для некоторого $\Gamma \in \gamma$. Следовательно, $[\alpha_i(x)]_{cX} \cap K = \varnothing$. Далее, в конечно аддитивное открытое покрытие β впишем звездно конечное открытое покрытие α. Тогда для любого $A \in \alpha$ существует $B \in \beta$ такое, что $A \subset B = \Gamma \cap X$. Значит, $[A]_{cX} \cap K = \varnothing$.

Достаточность. Покажем, что равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным пространством. Пусть β-произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда существует семейство γ открытых подмножеств cX такое, что $\beta = \{\Gamma \cap X : \Gamma \in \gamma\}$. Ясно, что множество $K = cX \setminus \cup\{\Gamma : \Gamma \in \gamma\}$ является компактным. Следовательно, для компакта $K \subset cX \setminus X$ существует последовательность равномерных покрытий $\{\alpha_i\}$, удовлетворяющая условию: для каждой точки $x \in X$ найдется номер $i \in N$ такой, что $[\alpha_i(x)]_{cX} \cap K = \varnothing$. Пусть $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_k\} \subset \gamma$ такое конечное подсемейство, что $[\alpha_i(x)]_{cX} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$. Отсюда следует, что $\alpha_i(x) \subset (\bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j) \cap X$. Так как покрытие β конечно аддитивное, то $(\bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j) \cap X \in \beta$. По условию теоремы существует звездно конечное открытое покрытие α пространства (X, τ_U) такое, что $[A]_{cX} \cap K = \varnothing$ для любого $A \in \alpha$. Аналогично, для компакта $[A]_{cX}$ существует такое конечное подсемейство $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n\} \subset \gamma$, что $[A]_{cX} \subset \bigcup_{m=1}^{n} \Gamma_m$. Тогда $A \subset (\bigcup_{m=1}^{n} \Gamma_m) \cap X$. Покрытие β является конечно аддитивным покрытием, поэтому также $(\bigcup_{m=1}^{n} \Gamma_m) \cap X \in \beta$. Из простой топологической леммы о том, что топологическое пространство является сильно паракомпактным тогда и только тогда, когда в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать звездно конечное открытое покрытие следует, что (X, τ_U) является сильно паракомпактным. Итак, равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным.

Напомним [1], что равномерное пространство (X,U) называется равномерно линделёфовым, если оно равномерно B-паракомпактно и индекс ограниченности $l(U) \le \aleph_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Всякое равномерно линделёфово пространство является сильно равномерно B-паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое равномерно линделёфово пространство является равномерно B-паракомпактным и его топологическое пространство (X, τ_U) линделёфово. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно B-паракомпактным.

ТЕОРЕМА 3. Равномерно совершенный прообраз сильно равномерно B-паракомпактного пространства является сильно равномерно B-паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно совершенное отображение равномерного пространства (X,U) на сильно равномерно B-паракомпактное равномерное пространство (Y,V) и ω - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие равномерного пространства (X,U). Ясно, что покрытие $\{f^{-1}y : y \in Y\}$ вписано в покрытие ω. Из замкнутости отображения f, следует что $\beta = \{f^{\#}O : O \in \omega\}$ является открытым покрытием пространства (Y,V), где $f^{\#}O = Y \setminus f(X \setminus O)$. Так как пространство (Y,V) сильно равномерно B-паракомпактно, то существует последовательность равномерных покрытий $\{\beta_n\}$, удовлетворяющая следующему условию: для каждой точки $y \in Y$ существуют номер $n \in N$ и $f^{\#}O \in \beta$ такие, что $\beta_n(y) \subset f^{\#}O$.

Легко видеть, что $f^{-1}\beta \succ \omega$. Пусть $x \in X$ - произвольная точка. Тогда для точки $y \in Y$ существуют номер $n \in N$ и $f^{\#}O \in \beta$ такие, что $\beta_n(y) \subset f^{\#}O$. Следовательно, существует $\alpha_n \in U$, такое, что и $f\alpha_n \succ \beta_n$. Легко видеть, что $\alpha_n(x) \subset f^{-1}(f\alpha_n(y)) \subset f^{-1}\beta_n(y) \subset O$. Сильная паракомпактность пространства (X, τ_U) следует из совершенности отображения f. Значит, равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно B -паракомпактным.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013. - 338 с.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, 2013. - 160 с.

Рецензент: д.ф.-м.н. Болжиев Б.А.