Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т.

БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ЭКИ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ВОЛЬТЕРРАНЫН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРДОО

Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

T.T. Karakeev, N.T. Mustafaeyva

REGULARIZATION OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

УДК: 517.968

Биринчи түрдөгү Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелерин регулярдоо маселеси изилденет. Регулярдоочу оператор түзүлүп, регулярдалган чыгарылыштын изилденүүчү теңдеменин так чыгарылышына шар ичинде бир калыпта жыйналуусу далилденген.

***Негизги сөздөр**: Вольтерра теңдемеси, кичи параметр, бир калыпта жыйналуу.*

В работе изучаются вопросы регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Получен регуляризирующий оператор, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению рассматриваемых уравнений в шаре.

***Ключевые слова**: уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость.*

In work questions of regularization of the linear integrated equations of Volterra of the first kind. The regularizing operator is received, uniform convergence of the regularized solution to the exact solution of the considered equations in a sphere is proved.

***Key words:** Volterra equations, small parameter, uniform convergence.*

Рассмотрим линейное двумерное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x,z,s)u(s,z)ds + \int_0^x \int_0^z Q_0(x,z,s,\tau)u(s,\tau)d\tau ds = g(x,z), \quad (1)$$

где известные функции $K(x,z,s)$, $Q_0(x,z,s,\tau)$, $g(x,z)$ подчиняются условиям:

а) $K(x,z,s) \in C^{1,0,0}(D_0)$, $D_0 = \{(x,z,s)/0 \le s \le x \le b, 0 \le z \le a\}$,

$g(x,z) \in C^{1,0}(D), D = [0,b] \times [0,a], g^{(i)}(0,z) = 0, i = 0,1, \qquad k(0,z) = 0$,

$k(x,z) = K(x,z,x)$ – неубывающая функция по x в области D;

б) $Q_0(x,z,s,\tau) \in C^{1,0,0,0}(D_1), D_1 = \{ 0 \le s \le x \le b, 0 \le \tau \le z \le a\}$;

в) $G(x,z) \ge d_1$, $G(x,z) = L(x,z,x) + C_1 g(x,z)$, $0 < C_1, C_2, d_1 = const$,

$L(x,z,s) = C_2 K(x,z,s) + K_x(x,z,s)$.

Пусть I – единичный оператор, D – оператор дифференцирования по переменной x, T – оператор Вольтерра: $(Tv)(x,z) = \int_0^x u(s,z)v(s,z)ds$. Действуем оператором $C_2 I + D + C_1 T$ на уравнение (1). Тогда получим интегральное уравнение Вольтерра третьего рода [1]

$$k(x,z)u(x,z)+\int_0^x G(s,z)u(s,z)ds=\int_0^x [L(s,z,s)-L(x,z,s)]u(s,z)ds+$$

$$+\int_0^x\int_0^z Q(x,z,s,\tau)\,u(s,\tau)d\tau ds+C_1\int_0^x u(s,z)ds\int_s^x K(\nu,z,s)u(\nu,z)d\nu+$$

$$+C_1\int_0^x\int_0^z u(s,\tau)d\tau ds\int_s^x Q_0(\nu,z,s,\tau)u(\nu,z)d\nu+f(x,z), \qquad (2)$$

где $f(x,z)=C_2 g(x,z)+g_x(x,z), Q(x,z,s,\tau)=-C_2 Q_0(x,z,s,\tau)-$
$-Q_{0x}(x,z,s,\tau)$.

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon+\mathrm{k}(x,z)\big)u_\varepsilon(x,z)+\int_0^x G(s,z)\,u_\varepsilon(s,z)ds=$$

$$=\int_0^x [L(s,z,s)-L(x,z,s)]\,u_\varepsilon(s,z)ds+\int_0^x\int_0^z Q(x,z,s,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+$$

$$+C_1\int_0^x u_\varepsilon(s,z)ds\int_s^x K(\nu,z,s)\,u_\varepsilon(\nu,z)d\nu+C_1\int_0^x\int_0^z u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds\times$$

$$\times\int_s^x Q_0(\nu,z,s,\tau)u_\varepsilon(\nu,z)d\nu+\varepsilon u(0,z)+f(x,z). \qquad (3)$$

С помощью резольвенты ядра $\big(-G(s,z)/\big(\varepsilon+k(x,z)\big)\big)$ уравнение (3) приведем к следующему эквивалентному виду [2,с.26]

$$u_\varepsilon(x,z)=\frac{-1}{\varepsilon+k(x,z)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,z)}{\varepsilon+k(\nu,z)}d\nu\right)\frac{G(s,z)}{\varepsilon+k(s,z)}\Bigg\{\int_0^s [L(x,z,\nu)-$$

$$-L(s,z,\nu)]u_\varepsilon(\nu,z)d\nu-\int_s^x [L(\nu,z,\nu)-L(x,z,\nu)]u_\varepsilon(\nu,z)d\nu+$$

$$+\int_0^s\int_0^z Q(s,z,\nu,\tau)\,u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu-\int_0^x\int_0^z Q(x,z,\nu,\tau)\,u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu+$$

$$+\int_0^s u_\varepsilon(\nu,z)d\nu\int_\nu^s K(y,z,\nu)\,u_\varepsilon(y,z)dy-\int_0^x u_\varepsilon(\nu,z)d\nu\int_\nu^x K(y,z,\nu)\times$$

$$\times u_\varepsilon(y,z)dy+\int_0^s\int_0^z u_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu\int_\nu^s Q_0(y,z,\nu,\tau)u_\varepsilon(y,\tau)dy\int_0^x\int_0^z u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu\times$$

$$\times \int_{v}^{x} Q_0(y,z,v,\tau)u_\varepsilon(y,\tau)dy + f(s,z) - f(x,z)\Bigg\} ds + \frac{1}{\varepsilon + k(x,z)} \times$$

$$\times exp\left(-\int_0^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon + k(v,z)} dv\right)\Bigg\{\int_0^x [L(s,z,s) - L(x,z,s)]u_\varepsilon(s,z)ds +$$

$$+\int_0^x \int_0^z Q(x,z,s,\tau)\, u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + C_1 \int_0^x u_\varepsilon(s,z)ds \int_s^x K(v,z,s)\, u_\varepsilon(v,z)dv +$$

$$+C_1 \int_0^x \int_0^z u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds \int_s^x Q_0(v,z,s,\tau)u_\varepsilon(v,z)dv + \varepsilon u(0,z) + f(x,z)\Bigg\} \equiv$$

$$\equiv (Au_\varepsilon)(x,z). \qquad (4)$$

Пусть $0 < u_0, r_0 = const$, $\Omega(D) = \{u(x,z) \in C(D): |u(x,z) - u_0| \le r_0\}$. Для любых $\bar{u}_\varepsilon(x,z)$, $\tilde{u}_\varepsilon(x,z) \in \Omega(D)$ оценим разность операторов $(A\bar{u}_\varepsilon)(x,z) - (A\tilde{u}_\varepsilon)(x,z)$. Тогда получим оценки

$$1)\ \Bigg|\frac{1}{\varepsilon + k(x,z)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon + k(v,z)} dv\right) \frac{G(s,z)}{\varepsilon + k(s,z)} \Bigg\{\int_0^s [L(s,z,v) -$$

$$-L(x,z,v)]\big(\bar{u}_\varepsilon(v,z) - \tilde{u}_\varepsilon(v,z)\big)dv + \int_s^x L(x,z,v)\big(\bar{u}_\varepsilon(v,z) - \tilde{u}_\varepsilon(v,z)\big)dv\Bigg\} ds\Bigg|$$

$$\le \frac{2(L_1 + C_2 L_2)}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon + k(v,z)} dv\right) \frac{G(s,z)}{\varepsilon + k(s,z)} \left(\int_s^x \frac{G(v,z)}{d_1} dv\right) \times$$

$$\times \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(v,z) - \tilde{u}_\varepsilon(v,z)| dv ds \le \frac{2(L_1 + C_2 L_2)}{d_1} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(s,z) - \tilde{u}_\varepsilon(s,z)| ds,$$

где $0 < L_2 = Lip(K(x,z,s)|x)$, $0 < L_1 = Lip(K_x(x,z,s)|x)$;

$$2)\ \Bigg|\frac{1}{\varepsilon + k(x,z)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon + k(v,z)} dv\right) \frac{G(s,z)}{\varepsilon + k(s,z)} \times$$

$$\times \int_0^s \int_0^z [Q(x,z,v,\tau) - Q(s,z,v,\tau)]\big(\bar{u}_\varepsilon(v,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(v,\tau)\big) d\tau dv\, ds\Bigg| \le$$

$$\le \frac{L_Q}{d_1} \int_0^x \int_0^z |\bar{u}_\varepsilon(s,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)|\, d\tau ds, \qquad \text{где} \quad 0 < L_Q = Lip(Q(x,z,s,\tau)|x);$$

3) $$\left|\frac{1}{\varepsilon+k(x,z)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon+k(v,z)}dv\right)\frac{G(s,z)}{\varepsilon+k(s,z)}\times\right.$$
$$\left.\times\int_s^x\int_0^z Q(x,z,v,\tau)\left(\bar{u}_\varepsilon(v,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(v,\tau)\right)d\tau dv\,ds\right|\le\frac{M_Q c}{\varepsilon+k(x,z)}\times$$
$$\times\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon+k(v,z)}dv\right)\frac{G(s,z)}{\varepsilon+k(s,z)}(x-s)ds\|\bar{u}_\varepsilon(x,z)-\tilde{u}_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)}$$
$$\le\frac{aM_Q}{d_1}\|\bar{u}_\varepsilon(x,z)-\tilde{u}_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)},\qquad \text{где } M_Q=\max_{D_1}|Q(x,z,s,\tau)|;$$

4) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+k(x,z)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon+k(v,z)}dv\right)\frac{G(s,z)}{\varepsilon+k(s,z)}\left\{\int_0^s(\bar{u}_\varepsilon(v,z)-\right.\right.$$
$$-\tilde{u}_\varepsilon(v,z))dv\int_s^x K(y,z,v)\bar{u}_\varepsilon(y,z)dy+\int_s^x\left(\bar{u}_\varepsilon(v,z)-\tilde{u}_\varepsilon(v,z)\right)dv\times$$
$$\left.\left.\times\int_v^x K(y,z,v)\bar{u}_\varepsilon(y,z)dy\right\}ds\right|\le\frac{2C_1M_Kr}{d_1}\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(s,z)-\tilde{u}_\varepsilon(s,z)|ds,$$

где $M_K=\max_D|K(x,z,s)|$;

5) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+k(x,z)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon+k(v,z)}dv\right)\frac{G(s,z)}{\varepsilon+k(s,z)}\times\right.$$
$$\times\left\{\int_0^s\tilde{u}_\varepsilon(v,z)dv\int_s^x K(y,z,s)\left(\bar{u}_\varepsilon(y,z)-\tilde{u}_\varepsilon(y,z)\right)dy+\int_s^x\tilde{u}_\varepsilon(v,z)dv\times\right.$$
$$\left.\left.\times\int_v^x K(y,z,s)\left(\bar{u}_\varepsilon(y,z)-\tilde{u}_\varepsilon(y,z)\right)dy\right\}ds\right|\le\frac{2C_1M_Kbr}{d_1}\times$$
$$\times\|\bar{u}_\varepsilon(x,z)-\tilde{u}_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)};$$

6) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+k(x,z)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,z)}{\varepsilon+k(v,z)}dv\right)\frac{G(s,z)}{\varepsilon+k(s,z)}\left\{\int_0^s\int_0^z(\bar{u}_\varepsilon(v,\tau)-\right.\right.$$
$$-\tilde{u}_\varepsilon(v,\tau))d\tau dv\int_s^x Q_0(y,z,v,\tau)\bar{u}_\varepsilon(y,z)dy+\int_s^x\int_0^z\left(\bar{u}_\varepsilon(v,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(v,\tau)\right)d\tau dv\times$$
$$\left.\left.\times\int_v^x Q_0(y,z,v,\tau)\bar{u}_\varepsilon(y,z)dy\right\}ds\right|\le\frac{2C_1M_{Q1}r}{d_1}\int_0^x\int_0^z|\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)|d\tau ds,$$

где $M_{Q1} = \max_{D_1} |Q_0(x,z,s,\tau)|$;

$$7)\ \left|\frac{1}{\varepsilon + k(x,z)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,z)}{\varepsilon + k(\nu,z)} d\nu\right) \int_0^x [L(s,z,s) - L(x,z,s) \times\right.$$

$$\left.\times](\bar{u}_\varepsilon(s,z) - \hat{u}_\varepsilon(s,z))ds\right| \leq \frac{L_1 + C_2 L_2}{d_1 e} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(s,z) - \hat{u}_\varepsilon(s,z)|ds;$$

$$8)\left|\frac{1}{\varepsilon + k(x,z)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,z)}{\varepsilon + k(\nu,z)} d\nu\right) \int_0^x \int_0^z Q(x,z,s,\tau)(\bar{u}_\varepsilon(s,\tau) -\right.$$

$$\left.-\hat{u}_\varepsilon(s,\tau))d\tau ds\right| \leq \frac{aM_Q}{d_1 e} \|\bar{u}_\varepsilon(x,z) - \hat{u}_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)};$$

Продолжая оценки в итоге из (4) получим следующее неравенство

$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x,z) - (A\tilde{u}_\varepsilon)(x,z)\|_{C(D)} \leq q\|\bar{u}_\varepsilon(x,z) - \tilde{u}_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)}, \quad (5)$$

$$q = \left(2C_1 r M_K + (2rb+1)M_{Q1}\right)a(1+e^{-1})d_1^{-1} + (L_1 + C_2 L_2)(2+e^{-1}) +$$

$$+\left(L_Q a + 2C_1 r\left(aM_Q + M_K\right)\right)bd_1^{-1}.$$

Для оператора $(H_\varepsilon u)(x,z)$, заданного в виде

$$(H_\varepsilon u)(x,z) \equiv -\frac{\varepsilon}{\varepsilon + k(x,z)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,z)}{\varepsilon + k(\nu,z)} d\nu\right)[u(x,z) - u(0,z)] +$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon + k(x,z)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,z)}{\varepsilon + k(\nu,z)} d\nu\right) \frac{G(s,z)}{\varepsilon + k(s,z)} [u(x,z) - u(s,z)]ds$$

при условиях *а*) - *в*) имеет место оценка [3]

$$\|(H_\varepsilon u)(x,z)\|_{C[0,b]} \leq 4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,z)\|_{C(D)} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right), \qquad (6)$$

где $\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup_{\substack{|x-t| \leq \varepsilon^\beta \\ 0 \leq z \leq a}} |u(x,z) - u(t,z)|, \qquad 0 < \beta < 1.$

Теорема. Пусть выполняются условия *а*) - *в*), $q < 1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x,z) \in C(D)$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1). При этом имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,z) - u(x,z)\|_{C(D)} \leq \left(4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,z)\|_{C[0,b]} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right)/(1-q).$$

Доказательство. Полагая $\eta_\varepsilon(x,z) = u_\varepsilon(x,z) - u(x,z)$ из (4) получим следующее уравнение

$$\eta_\varepsilon(x,z) = \frac{-1}{\varepsilon + k(x,z)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,z)}{\varepsilon + k(\nu,z)} d\nu\right) \frac{G(s,z)}{\varepsilon + k(s,z)} \left\{\int_0^s [L(x,z,\nu) -\right.$$

$$-L(s,z,\nu)]\eta_\varepsilon(\nu,z)d\nu-\int_s^x[L(x,z,\nu)-L(\nu,z,\nu)]\eta_\varepsilon(\nu,z)d\nu+$$

$$+\int_0^s\int_0^z Q(s,z,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu-\int_0^x\int_0^z Q(x,z,\nu,\tau)\,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu+$$

$$+C_1\left[\int_0^s\eta_\varepsilon(\nu,z)d\nu\int_\nu^s K(y,z,\nu)\,u(y,z)dy-\int_0^x\eta_\varepsilon(\nu,z)d\nu\int_\nu^x K(y,z,\nu)\times\right.$$

$$\times u(y,z)dy+\int_0^s u(\nu,z)d\nu\int_\nu^s K(y,z,\nu)\,\eta_\varepsilon(y,z)dy-\int_0^x u(\nu,z)d\nu\int_\nu^x K(y,z,\nu)$$

$$\times\eta_\varepsilon(y,z)dy+\int_0^s\int_0^z u(\nu,\tau)d\tau d\nu\int_\nu^s Q_0(y,z,\nu,\tau)\,\eta_\varepsilon(y,\tau)dy-\int_0^x\int_0^z u(\nu,\tau)d\tau d\nu$$

$$\left.\times\int_\nu^x Q_0(y,z,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(y,\tau)dy+\int_0^s\int_0^z\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu\int_\nu^s Q_0(y,z,\nu,\tau)\,u(y,\tau)dy\right]-$$

$$\left.-\int_0^x\int_0^z\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu\int_\nu^x Q_0(y,z,\nu,\tau)u(y,\tau)dy\right]+\varepsilon\big(u(x,z)-u(s,z)\big)\Big\}ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+k(x,z)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,z)}{\varepsilon+k(\nu,z)}d\nu\right)\left\{\int_0^x[L(s,z,s)-L(x,z,s)]\,\eta_\varepsilon(s,t)ds+\right.$$

$$+\int_0^x\int_0^z Q(x,z,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+C_1\int_0^x\eta_\varepsilon(s,z)ds\int_s^x K(\nu,z,s)u(\nu,z)d\nu+$$

$$+C_1\int_0^x u(s,z)\,ds\int_s^x K(\nu,z,s)\,\eta_\varepsilon(\nu,z)d\nu+C_1\int_0^x\int_0^z\eta_\varepsilon(s,\tau)\,d\tau ds\times$$

$$\times\int_s^x Q_0(\nu,z,s,\tau)\,u(\nu,\tau)d\nu+\int_0^x\int_0^z u(s,\tau)\,d\tau ds\times$$

$$\left.\times\int_s^x Q_0(\nu,z,s,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu\right]-\varepsilon u(x,z)+\varepsilon u(0,z)\Big\}.$$

Отсюда, с учетом (5), получим

$$\|\eta_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)}\le q\|\eta_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)}+\|(H_\varepsilon u)(x,z)\|_{C(D)}.$$

В силу условия $q<1$, используя (6) имеем

$$\|\eta_\varepsilon(x,z)\|_{C(D)} \le \left(4(d_1 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x,z)\|_{C[0,b]} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right)/(1-q).$$

Следовательно, при $\varepsilon \to 0$ функция $u_\varepsilon(x,z) \to u(x,z)$ равномерно.

Следствие. При выполнении условий теоремы решение уравнения (1) единственно в $\Omega(D)$.

Литература:

1. Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Наука, техника и образования, 2017. - №8(38). - С. 5-11.
2. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. - Бишкек: Илим, 2006. - С. 164.
3. Максутов А.О. Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными//Исслед. по интегро-дифференц. Уравнениям. - Фрунзе: Илим, 2000. - Вып. 29. - С. 148-155.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Темиров Б.К.