МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Асанов А., Чоюбеков С.М.

ИНТЕГРАЛДЫК ЧЕКТЕРИ ӨЗГӨРҮЛМӨ БОЛГОН ВОЛЬТЕРРАНЫН I ТИПТЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО ПАРАМЕТРИН ТАНДОО

Асанов А., Чоюбеков С.М.

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРАЛА

A. Asanov, S.M. Choyubekov

THE CHOICE OF PARAMETER OF REGULARIZATION OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH PEREMENNYMI OUTSIDE OF THE INTEGRAL

УДК: 517.968 (075.3)

Заманбап компьютердик технологиялардын өнүгүүсү менен ар түрдүү татаал процесстерди моделдештирүү жана алардын сандык чечимдерин реализациялоого мүмкүчүлүк түзүлдү. Көпчүлүк ушул типтеги маселелер интегралдык теңдемелерге келтирилет. Ошондуктан, биринчи планга алардын чечимдерин сапаттык изилдениши коюлат.

Бул жумушта оң жагы жакындаштырылып берилген интегралдоо эки предели тең өзгөрүлмөлүү болгон интегралдык теңдемени регуляризациялоо үчүн параметрди тандоо алгоритми сунунушталган.

Негизги сөздөр: *интегралдык тендеме, Дирихле формуласы, кичи параметр, Гольдердин мейкиндиги.*

С развитием современных компьютерных технологий появляется возможность моделировать самые сложные процессы и реализацию численных решений. И многие задачи такого рода сводятся к интегральным уравнениям. Тем самым качественное исследование решений (сходимость и существование решений) выдвигается в первый план в этих задачах.

В данной работе предложен алгоритм выбора параметра регуляризации для интегральных уравнений с двумя переменными пределами интегрирования с приближенными данными правой части.

Ключевое слова: *интегральное уравнения, формула Дирихле, малый параметр, пространство Гольдера*

With the development of modern computer technologies, it becomes possible to model the most complex processes and implement numerical solutions. And many problems of this kind reduces to integral equations. Thus, a qualitative study of solutions (convergence and existence of solutions) is put in the forefront in these problems.

In this paper we propose an algorithm for choosing the regularization parameter for integral equations with two variable integration limits with approximate data on the right-hand side.

Key words: *integral equation, Dirichlet formula, small parameter, Golder space.*

Рассмотрим

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t);\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \tag{1}$$

где $\alpha(t) \in C[t_0,t]; \alpha(t_0) = t_0; \alpha(t) \le t,$и $K(t,s)$ –заданные а $f(t) -$ функция на отрезке $[t_0,t]$ с приближенным заданным $f_\delta(t)$ и в области $G = \{(t,s):\ t_0 \le t \le T,\ \alpha(t) \le s \le t\}; \tau \le t, \alpha(\tau) \le \alpha(t), u(t)$– искомая функция на отрезке $[t_0,t]$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u(t_0);\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \tag{2}$$

$$\varepsilon v_\delta(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)v_\delta(s,\varepsilon)ds = f_\delta(t) + \varepsilon u_\delta(t_0);\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \tag{3}$$

$0 < \varepsilon < 1$–некоторый малый параметр.

$$\xi_\delta(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon) - v_\delta(t,\varepsilon); \tag{4}$$

из (2) отнимая (3) получим:

$$\varepsilon\xi_\delta(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)\xi_\delta(t,\varepsilon)ds=[f(t)-f_\delta(t)]+$$
$$+\varepsilon[u(t_0)-u_\delta(t_0)];\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (5)$$

Последнее перепишем в слудующем виде:

$$\xi_\delta(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)\xi_\delta(t,\varepsilon)ds=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi_\delta(t,\varepsilon)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\xi_\delta(t,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)];t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (6)$$

Используя резольвенту $R(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}$ ядра$-\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)$ получим

$$\xi_\delta(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[\,K(t,s)-K(s,s)]\xi_\delta(t,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\,\xi_\delta(t,\varepsilon)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$
$$\times[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$
$$\times[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau ds--\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$
$$\times K(\tau,\tau)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau ds++\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}ds;\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (7)$$

Вычислим двойные интегралы, при этом воспользуемся формулой Дирихле и будем иметь ввиду, что $d_s\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau\right)=\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)ds,\ \alpha(t)\le t$

$$I_1=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau ds=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\alpha(t)}^{t}\int_{\tau}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau;$$
$$I_2=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau ds=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}ds\right][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}ds\right][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau=$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(\tau,\tau)d\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t K(\tau,\tau)d\tau}\right][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}\left[1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t K(\tau,\tau)d\tau}\right][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau;$$
$$I_3=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau ds=$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}\left[\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{\alpha(s)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}ds\right]K(\tau,\tau)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau=$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}\left[1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(s,s)ds}\right]K(\tau,\tau)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau=$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(s,s)ds}\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau;$$
$$I_4=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}ds=$$
$$=\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}-$$
$$-\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s)ds}-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}ds=$$

В силу I_1, I_2, I_3 и I_4 уравнение (7) примед вид

$$\xi_\delta(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}\{K(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(s,s)ds}+\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{\alpha(t)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$
$$\times[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds+\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\right]\times$$
$$\times[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\}\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+\int_{\alpha(t)}^{t}\{-[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}\left[1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\right][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\}\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau-$$
$$-\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)ds}-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}ds \quad (8)$$

Тогда из (8) получится

$$\xi_\delta(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+$$
$$+\int_{\alpha(t)}^{t}H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi_\delta(t,\varepsilon)d\tau+U_\delta(t,\varepsilon);\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \quad (9)$$

где

$$H_0(t,\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K_0\,(s,s)ds} \quad (10)$$

$$H_1(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]ds; \quad (11)$$

$$H_2(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{t}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K\,(s,\tau)]\,ds; \quad (12)$$

$$U_\delta(t,\varepsilon)=-\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)ds}-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_\delta(t_0)]\right\}ds \quad (13)$$

Потребуем выполнение следующих условий:

1^0 $\alpha(t)\in C^1[t_0,\tau],\alpha'(t)>0$ при почти всех $t\epsilon[t_0;T]$

$2^0 K(t,t)\in C[t_0,T]$ и $K(s,s)\geq m>0$ при всех $s\,\epsilon[t_0;T]$

$3^0\forall t,\tau\in[t_0,T](t>\tau)$ и при всех $(t,s),(\tau,s)\epsilon G$, $|K(t,\tau)-K(s,\tau)|\leq L|t-s|,\ L>0-\mathrm{const}$

Далее, установим справедливость следующих утверждениям:

Лемма 1. Если выполняются условия 1^0-2^0. Тогда для функции $H_0(t,\epsilon,\tau)$ определенной по формуле (10) имеет место

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau\leq\gamma_0>0;\ t\epsilon[t_0\,;T] \quad (14)$$

$$\gamma_0=\sup_{\tau\in[\alpha\{t\},T]}\frac{K\big(\alpha(\tau),\alpha(\tau)\big)}{|K(\tau,\tau)|}\alpha'(\tau)$$

Доказательство:

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau\leq\int_{t_0}^{\alpha(t)}\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(s,s)ds}d\tau=\begin{vmatrix}\nu=\alpha^{-1}(\tau)\\ \tau=\alpha(\nu)\\ d\tau=\alpha'(\nu)d\nu\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K\big(\alpha(\nu),\alpha(\nu)\big)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\nu^t K(s,s)ds}\alpha'(\nu)d\nu=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\frac{K\big(\alpha(\nu),\alpha(\nu)\big)\alpha'(\nu)}{K(\nu,\nu)}K(\nu,\nu)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\nu^t K(s,s)ds}d\nu\leq$$

$$\leq \gamma_0 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varepsilon} K(\nu,\nu) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\nu^t K(s,s)ds} d\nu \leq \gamma_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\nu^t K(s,s)ds}\Big|_{t=t_0}^{\nu=t} = \gamma_0$$

Доказано требуемая оценка.

Лемма 2. Пусть$H_1(t,\tau,\varepsilon)$ и$H_2(t,\tau,\varepsilon)$определены по формулам (11), (12) соответственно. Кроме того выполняются условия $1^0 - 3^0$. Тогда справедливы оценки:

1) $|H_1(t,\tau,\varepsilon)| \leq \frac{L}{m}(2e^{-1}+1),\ (t,\tau) \in G_1 = \{(t,\tau): t_0 \leq t \leq T, t_0 \leq \tau \leq \alpha(t)\};$ (15)

2) $|H_2(t,\tau,\varepsilon)| \leq \frac{L}{m}(t,\tau) \in G_2 = \{(t,\tau): t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq \tau \leq t\};$ (16)

Доказательство: Имея ввиду$d_s\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau\right) = \frac{1}{\varepsilon}K(s,s)$ и воспользовавшись формулой интегрирования по частям получаем соответствующие оценки.

$$|H_1(t,\tau,\varepsilon)| \leq \frac{L(t-\tau)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds} + \int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{L(t-s)}{\varepsilon^2} K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} ds \leq$$

$$\leq \frac{L(t-\tau)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds} + \frac{L}{\varepsilon}\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(ss)d\tau} -$$

$$-\frac{L(t-\tau)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds} + \int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{L}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} ds \leq$$

$$\leq \frac{L}{\varepsilon}\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(ss)d\tau} + \frac{L}{\varepsilon}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} ds \leq$$

$$\leq \frac{2L(t-\tau)}{m} \sup_{q>0}(qe^{-q}) + \int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{L}{\varepsilon} e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-s)} ds \leq \frac{L}{m}(2e^{-1}+1); (t,\tau) \in G_1.$$

$$q = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(s,s)d\tau\,; m = \sup_{q>0} q$$

$$|H_2(t,\tau,\varepsilon)| \leq \frac{L(t-\tau)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds} + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t L(t-\tau)K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} ds \leq$$

$$\leq \frac{L(t-\tau)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds} + \frac{L(t-s)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\Big]_{s=\tau}^{s=t} + \frac{L}{\varepsilon}\int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} ds \leq$$

$$= \frac{L}{\varepsilon}\int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} ds \leq \frac{L}{m}; (t,\tau) \in G_2.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть выполняется условия 2^0 и $U_\delta(t,\varepsilon)$определен формулой (13) Тогда: 1). Если $U_\delta(t,\varepsilon) \in C[t_0;T]$ то на $[t_0\,;T]$ справедлива оценка

$$\|U_\delta(t,\varepsilon)\|_C \leq 2\left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \propto_0 \delta\right); \tag{17}$$

где $\|f(t) - f_\delta(t)\|_C = \sup_{t\in[t_0,T]} |f(t) - f_\delta(t)| < \delta\,, |u(t_0) - u_\delta(t_0)| < \propto_0 \delta$

Доказательство:

$$|U_\delta(t,\varepsilon)| \leq \{\tfrac{1}{\varepsilon}\|f(t) - f_\delta(t)\|_C + \|u(t_0) - u_\delta(t_0)\|_C\} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s)ds} +$$

$$+\{\tfrac{1}{\varepsilon}\|f(t) - f_\delta(t)\|_C + \|u(t_0) - u_\delta(t_0)\|_C\} \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} ds \leq$$

$$\leq \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \propto_0 \delta\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s)ds} + \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \propto_0 \delta\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s)ds} \leq 2\left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \propto_0 \delta\right).$$

Здесь,$e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s)ds} \leq 1$ что требовано доказано.

Теорема. Пусть выполняются условия $1^0 - 3^0$ и $\gamma_0 b_0 < 1$, где

$$\gamma_0 = \sup_{\tau\in[\alpha\{t\},T]} \frac{K_0(\alpha(\tau),\alpha(\tau))\alpha'(\tau)}{|K_0(\tau,\tau)|} \quad \text{и} \quad b_0 = \exp\left[\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)\right].$$

Тогда 1) если уравнение (1) имеет решение $u(t) \in C[t_0;T]$, то решение $v(t,\varepsilon)$уравнения (5) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению$u(t)$и справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\| \leq \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0} 2[\|u(t)\|_C e^{-\frac{m}{1-\beta}} + \omega_u(\varepsilon^\beta);$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|t-s|<\delta} |u(t) - u(s)|$;

2) если уравнение (1) имеет решение $u(t) \in C^\gamma[t_0;T]$, $0 < \gamma \le 1$,то решение $v(t,\varepsilon)$уравнения (5) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению u(t). При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\| \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0} c_0 c_\gamma \varepsilon^\gamma,$$

где $c_0 = \gamma \int_0^\infty e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$; $c_\gamma = \sup\limits_{(t,s)\in[t_0,T]} \frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma}$.

Доказательство: В силу лемм 1-4 из (7) имеем

$$|\xi_\delta(t,\varepsilon)| \le \gamma_0\|\xi_\delta(t,\varepsilon)\|_C + \int_{t_0}^{\alpha(t)} \frac{L}{m}(2e^{-1}+1)|\xi_\delta(t,\varepsilon)|d\tau +$$
$$+ \int_{\alpha(t)}^{t} \frac{L}{m}|\xi_\delta(t,\varepsilon)|d\tau + |U_\delta(t,\varepsilon)|; t\epsilon[t_0\,;T]$$

Отсюда имеем

$$|\xi_\delta(t,\varepsilon)| \le \gamma_0\|\xi_\delta(t,\varepsilon)\|_C + \int_{t_0}^{t} \frac{L}{m}(2e^{-1}+1)|\xi_\delta(t,\varepsilon)|d\tau + |U_\delta(t,\varepsilon)|;$$

$$|\xi_\delta(t,\varepsilon)| \le \{\gamma_0\|\xi_\delta(t,\varepsilon)\|_C + U_\delta(t,\varepsilon)\} e^{\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)};$$

$$\|\xi_\delta(t,\varepsilon)\|_C \le \{\gamma_0\|\xi_\delta(t,\varepsilon)\|_C e^{\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)} + \|U_\delta(t,\varepsilon)\|_C e^{\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)}$$

$$\|\xi_\delta(t,\varepsilon)\|_C \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}\|U_\delta(t,\varepsilon)\|_C;\ t\epsilon[\,t_0\,;T]$$

Теорема доказана.

Литература:

1. Чоюбеков С.М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица. Международный научный журнал «Молодой ученый» № 8 (112) Россия. - Казань, 2016.
2. Чоюбеков С.М., Бекешов Т.О., Асанов А. Об одном классе неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода. // Вестник Ошского государственного университета, №3. - Ош, 2014.
3. Асанов А., Бекешов Т.О., Чоюбеков С.М. О решение неклассического интегрального уравнения I рода в пространстве не прерывных функции. // Вестник Ошского государственного университета, №3. - Ош, 2012.
4. Асанов А., Бекешов Т.О., Чоюбеков С.М. Регуляризация и единственность решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица. // Вестник спецвыпуск КНУ имени Ж. Баласагына. - Бишкек, 2011.
5. Асанов А., Бекешов Т.О. Единственность решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными // Мат-лы Межд. конф. «Актуальные проблемы математики и математические моделирования экологических систем». - Алматы, октябрь 1996. - Алматы, 1996.

Рецензент: д.ф.-м.н. Турсунов Д.А.