DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Абдумиталип уулу К.

ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ

Абдумиталип уулу К.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Abdumitalip uulu K.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MIXED PARABOLA-HYPERBOLIC TYPE OF THE FOURTH ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS

УДК: 517.956.6

Туруктуу коэффициенттери бар төртүнчү тартиптеги гиперболалык жана параболалык теңдемелер үчүн бириктирүү маселесинин чечилүүчүлүгү изилденген. Теңдеменин тартиби төрт болуп жана бириктирүү шарттары мүнөздөлгөн сызыкта берилсе, анда маселенин туура коюулуусу үчүн желимдөө шарттарынын төртөөсү аткарылуусу керектиги аныкталган: функциянын өзү жана анын ***y*** *боюнча алынган бирден үчкө чейинки туундусу. Бул маселенин өзгөчөлүгү катары экинчи тартиптеги аралаш парабола-гиперболалык оператордун, тегиздиктин* ***y=0*** *сызыгында аралаш оператордун тиби өзгөргөндө,* ***y*** *боюнча экинчи тартиптеги дифференциалдык ореаторлор үчүн колдонулуусун айтууга болот. Маселенин негизги максаттары изделип жаткан функциянын издерин аныктоо, жана теңдеменин тибинин өзгөрүү чегинде анын биринчи, экинчи жана үчүнчү тартиптеги туундусун табуу, ошондой эле аралаш аймакта чечимин табуу болуп эсептелет. Теңдеменин тибинин өзгөрүү сызыгында интегралдык теңдемелер ыкмасы менен чечилүүсү удаалаш жакындаштыруу ыкмасы менен аныкталган интегралдык экинчи тартиптеги Фредгольмдун теңдемесин алабыз. Функциянын изин жана үчүнчү тартипке чейинки туундусун аныктап алгандан кийин, коюулган маселенин чечими гиперболалык аймак үчүн Римандын функциясы, параболалык аймак үчүн Гриндин функциясы ыкмалары менен табылат.*

Негизги сөздөр: *чек аралык маселе, параболалык теңдеме, гиперболалык теңдеме, жалгаштыруу шарты, интегралдык теңдеме, Гриндин функциясы, Бесселдин функциясы.*

В работе исследована разрешимость задачи сопряжения для гиперболического и параболического уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Установлено, что когда порядок уравнения равен четырем и условия сопряжения задаются на характеристической линии, то для корректности задачи требуется задание четырех условий склеивания: сама функция и её производные по ***y*** *от первого до третьего порядка включительно. Особенностью данной задачи является то, что смешанный параболо-гиперболический оператор второго порядка применяется к дифференциальному оператору второго порядка по* ***y****, когда тип смешанного оператора меняется на линии* ***y=0*** *плоскости. Основные цели задачи заключаются в определении следа искомой функции и ее производных первого, второго и третьего порядков на линии изменения типа уравнений, а также построение решений в смешанной области. Методом интегральных уравнений на линии изменения типа уравнений получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого устанавливается методом последовательны приближений. После определения следа функции и её производных до третьего порядка включительно, решение поставленной задачи находится методом функции Римана в гиперболической*

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

области, а в параболической области – методом функции Грина.

Ключевые слова: *краевая задача, параболическое уравнение, гиперболическое уравнение, условия склеивания, интегральное уравнение, функция Грина, функция Бесселя.*

The solvability of the conjugation problem for hyperbolic and parabolic equations of the fourth order with constant coefficients is investigated. It was found that when the order of the equation is four and the conjugation conditions are set on the characteristic line, then for the correctness of the problem it is necessary to set four gluing conditions: the function itself and its derivatives with respect to y from the first to the third order inclusive. A feature of this problem is that a second-order mixed parabolic-hyperbolic operator is applied to a second-order differential operator in ***y*** *when the type of the mixed operator changes on the line* ***y = 0*** *of the plane. The main objectives of the problem are to determine the trace of the desired function and its derivatives of the first, second and third orders on the line of changing the type of equations, as well as to construct solutions in a mixed area. Using the method of integral equations on the line of changing the type of equations, we obtain a Fredholm integral equation of the second kind, the solvability of which is established by the method of successive approximations. After determining the trace of the function and its derivatives up to the third order inclusive, the solution of the problem posed is found by the method of the Riemann function in the hyperbolic area, and in the parabolic area by the method of the Green's function.*

Key words: *boundary value problem, parabolic equation, hyperbolic equation, gluing conditions, integral equation, Green's function, Bessel's function.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0 \tag{1}$$

где

$$L = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + c_1, y > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + c_2, y < 0, \end{cases}$$

где $c_1, c_2 = const$.

Пусть D - пятиугольник, ограниченный отрезками линий

$AC: y = -x,$

$CB: y = x - \ell, BB_0 : x = \ell, B_0A_0 : y = h, A_0A : x = 0, (\ell, h > 0),$

$D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0)$.

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y)$ является решением уравнения (1) в области $D \cap (y \neq 0)$;

2) $u(x, y) \in C^3(\overline{D}),\ u(x, y) \in C^4(D)$;

3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), u|_{BB_0} = \varphi_2(y), 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2}, \tag{3}$$

$$u|_{BC} = \psi_2(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{4}$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_3(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2}, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_4(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{AC} = \psi_5(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2}, \tag{7}$$

где $\varphi_i(y)(i=1,2)$, $\psi_j(j=\overline{1,5})$ - заданные гладкие функции, n - внутренняя нормаль, причем

$$\begin{gathered}\varphi_i(y) \in C^2[0,h](i=1,2),\ \psi_j(x) \in C^3\left[0,\frac{\ell}{2}\right](j=1,3),\\ \psi_5(x) \in C^2\left[0,\frac{\ell}{2}\right],\ \psi_k(x) \in C^3\left[\frac{\ell}{2},0\right](k=2,4)\end{gathered} \tag{8}$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \varphi_2(0) = \psi_2(\ell), \tag{9}$$

2. Сведение задачи к системе уравнений.

Из постановки задачи 1 вытекает следующие условия склеивания

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \tau(x), 0 \le x \le \ell, \tag{10}$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell, \tag{11}$$

$$u_{yy}(x,-0) = u_{yy}(x,+0) = \mu(x), 0 \le x \le \ell, \tag{12}$$

$$u_{yyy}(x,-0) = u_{yyy}(x,+0) = \theta(x), 0 \le x \le \ell, \tag{13}$$

Из условий (3) - (7) имеем

$$\begin{gathered}u_y(x,-x) = g_1(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2},\\ u_y(x,x-\ell) = g_2(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell,\\ u_{yy}(x,-x) = g_3(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2},\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$g_1(x) = -\frac{1}{2}\psi_1'(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2},$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2}\psi_2'(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_4(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell,$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$g_3(x)=\frac{1}{4}\psi_1'(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3'(x)+\frac{1}{2}\psi_5(x), 0\le x\le\frac{\ell}{2}.$$

Задача 1, когда $c_1=c_2=0$, а вместо условия (4) берется условие $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC}=\psi_2(x), \frac{\ell}{2}\le x\le\ell$, изучена в работе [1].

Уравнение (1) представим в виде

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=w_1(x,y),(x,y)\in D_1, & (15)\\ w_{1xx}-w_{1y}+c_1w_1=0,(x,y)\in D_1, & (16)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=w_2(x,y),(x,y)\in D_2, & (17)\\ w_{2xx}-w_{2yy}+c_2w_2=0,(x,y)\in D_2, & (18)\end{cases}$$

3. Решение задачи в области D_2. Из (12), (13) с учетом (17) для $w_2(x,y)$ имеем начальные условия

$$w_2(x,0)=\mu(x), w_{2y}(x,0)=\theta(x), 0\le x\le\ell, \tag{19}$$

Решение уравнения (18), удовлетворяющее условиям (19) имеет вид [2]

$$\begin{aligned} w_2(x,y)=&\frac{\mu(x+y)+\mu(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\theta(\xi)d\xi+\\ &+\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\,y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_2}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\mu(\xi)d\xi, \end{aligned}\tag{20}$$

где функция J_0 представляет собой функции Бесселя нулевого порядка, а J_1 - первого порядка.

Полагая $y=-x$ из (20) имеем соотношение между $\mu(x)$ и $\theta(x)$:

$$\begin{aligned} \mu(x)+\sqrt{c_2}\frac{x}{2}\int_0^x\frac{J_1\left(\sqrt{c_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)}{\sqrt{\xi(\xi-x)}}\mu(\xi)d\xi=2g_3(x)-g_3(0)+\\ +\int_0^x J_0\left(\sqrt{c_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)\theta(\xi)d\xi. \end{aligned}\tag{21}$$

4. Получение соотношения из области D_1. Устремляя y к нулю из уравнения (16) с учетом (19) получим соотношение [3]

$$\mu''(x)-\theta(x)+c_1\mu(x)=0, 0\le x\le\ell, \tag{22}$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Из краевых условий (2) имеем следующие условия

$$\mu(0)=\varphi_1''(0), \mu(\ell)=\varphi_2''(0). \tag{23}$$

Если введем обозначение

$$\mu(x)=\widetilde{\varphi}_1(x)+\widetilde{\mu}(x), \tag{24}$$

где $\widetilde{\varphi}_1(x)=\varphi_1''(0)+\dfrac{x}{\ell}\left[\varphi_2''(0)-\varphi_1''(0)\right]$.

Тогда получаем краевую задачу

$$\begin{cases}\tilde{\mu}''(x)=\theta(x)-c_1\mu(x), 0\le x\le \ell\\ \tilde{\mu}(0)=0, \tilde{\mu}(\ell)=0\end{cases}, \tag{25}$$

Решение задачи (25) представим в виде

$$\tilde{\mu}(x)=\int_0^{\ell} G(x,\xi)\left[\theta(\xi)-c_1\mu(\xi)\right]d\xi, \tag{26}$$

Если учесть обозначение (24), то из (26) получим соотношение

$$\mu(x)=\widetilde{\varphi}_1(x)-c_1\int_0^{\ell} G(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^{\ell} G(x,\xi)\theta(\xi)d\xi, 0\le\xi\le\ell, \tag{27}$$

Рассматривая левую часть уравнения (21) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода и после обращения его относительно $\mu(x)$ через резольвенту ядра данного уравнения, будем иметь

$$\mu(x)=\tilde{g}(x)-\int_0^x J_0\left[\sqrt{c_2}(x-\xi)\right]\theta(\xi)d\xi, \tag{28}$$

где

$$\tilde{g}(x)=2g_3(x)-g_3(0)-\int_0^x\left[2g_3(\xi)-g_3(0)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left(\sqrt{c_2}\sqrt{x(x-\xi)}\right)d\xi.$$

5. Получение интегрального уравнения относительно $\theta(x)$. Рассмотрим систему уравнений: (27), (28). Нетрудно убедиться, что после исключения $\mu(x)$, из рассматриваемой системы, придём к интегральному уравнению

$$\theta(x)=\sqrt{c_2}\int_0^x J_1\left[\sqrt{c_2}(x-\xi)\right]\theta(\xi)d\xi+\Phi_1(x)+\int_0^{\ell}\mathrm{K}_1(x,\xi)\,\theta(\xi)d\xi, \tag{29}$$

где

$$\mathrm{K}_1(x,\xi)=G_x(x,\xi)-c_1\int_{\xi}^{\ell}G_x(x,t)\Im_0\left[\sqrt{c_2}(t-\xi)\right]dt,$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\Phi_1(x) = \tilde{\varphi}_1'(x) - \tilde{g}_1'(x) - c_1 \int_0^{\ell} G_x(x,\xi)\tilde{g}(\xi)d\xi .$$

Чтобы получить интегральное уравнение Фредгольма второго рода, поступим следующим образом: сначала найдем обращение уравнения (29), затем после некоторого преобразования, придём к следующему интегральному уравнению

$$\theta(x) = \Phi(x) + \int_0^{\ell} \mathrm{K}(x,\xi)\theta(\xi)d\xi , \qquad (30)$$

где

$$\mathrm{K}(x,\xi) = \mathrm{K}_1(x,\xi) + \int_0^x R_1(x,t)\mathrm{K}_1(t,\xi)dt ,\ \Phi(x) = \Phi_1(x) + \int_0^x R_1(x,t)\Phi_1(t)dt ,\ R_1(x,t) \text{ -}$$

резольвента ядра $\sqrt{c_2}J_1\left[\sqrt{c_2}(x-t)\right]$.

Пусть $\|K\|_{C(\bar{Q})} = \max\limits_{(x,\xi)\in\bar{Q}} |K(x,\xi)|$, где $Q = \{(x,\xi): 0 \le x \le \ell, 0 \le \xi \le \ell\}$.

Потребуем выполнение следующего условия:

$$\ell\|K\|_{C(\bar{Q})} < 1. \qquad (31)$$

Тогда, при выполнении условия (31), интегральное уравнение (30) разрешимо и его решение будет единственным [4].

Таким образом из (30) однозначно определим искомую функцию $\theta(x)$. Тогда из (28) можно найти функцию $\mu(x)$. Следовательно, по формуле (20), определим и функцию $w_2(x,y)$. Дифференцируя дважды по y равенство (17) в области D_2 однозначно найдем решение задачи 1 и это решение можно представить в виде

$$u(x,y) = \tau(x) + y\nu(x) + \int_0^y (y-\eta)w_2(x,\eta)d\eta .$$

6. Решение задачи в области D_1. Для решения поставленной задачи рассмотрим уравнение (16). Так как для функции $w_1(x,y)$ выполняются следующие условиям в области D_1:

$$w_1(0,y) = \varphi_1''(y), w_1(\ell,y) = \varphi_2''(y), 0 \le y \le h,$$
$$w_1(x,0) = \mu(x), 0 \le x \le \ell.$$

Методом функции Грина однозначно представим решение этой задачи в виде:

$$w_1(x,y) = \int_0^y G_x\left(x,y;0,\eta\right) \varphi_1''(\eta)e^{c_1(y-\eta)}d\eta - \int_0^y G_x\left(x,y;\ell,\eta\right) \varphi_2''(\eta)e^{c_1(y-\eta)}d\eta +$$

$$+\int_0^{\ell} G\left(x,y;\xi,0\right) e^{c_1 y}\mu(\xi)d\xi,$$

где

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$ - функция Грина.

Интегрируя дважды по y из (15) найдем решение задачи 1 в параболической части области D_1:

$$u(x,y)=\tau(x)+y\nu(x)+\int_0^y(y-\eta)w_1(x,\eta)d\eta,\ (x,y)\in D_1.$$

Таким образом доказана.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (8), (9) и (31)**.** Тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Литература:

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. - 220 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 736 с.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. - М.: Наука, 1975. - 304 с.