DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 3, 2021

Сражидинов А.

ТҮЙҮНДӨЛГӨН ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ӨТМӨК МЕТОДУ ЖАНА АНЫН КЭЭ БИР КОЛДОНУШТАРЫ

Сражидинов А.

МЕТОД ПЕРЕХОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

A. Srazhidinov

TRANSITION METHOD FOR CONVOLUTION EQUATIONS AND SOME OF ITS APPLICATIONS

УДК: 517.968

Аталган метод автор тарабынан мурдараак сунушталса да «Түйүндөлгөн теңдемелер үчүн өтмөк методу» деп эми аталууда. Автордун аталган баштапкы иштеринде Вольтерранын биринчи тектеги түйүндөлгөн теңдемелеринин L_2 мейкиндигиндеги чыгарылыштарын так жана жакындаштырып табууга багытталган.Каралып жаткан ишибизде аталган методдун жардамында: Түйүн жөнүндөгү Титчмарштын белгилүү теоремасы далилденди; Вольтерранын биринчи тектеги түйүн теңдемеси үчүн Фредгольмдун биринчи тектеги симметриялуу ядролуу сызыктуу интегралдык теңдемелер теориясында фундаменталдык мааниге ээ болгон теңдеменин ядросунан алынган истоксымал (истокообразная) функция жөнүндөгү Гильберт-Шмидтин теоремасынын аналогу далилденди. Ошондой эле, өзүмдүк маанилердин бар жана алардын чыныгы сандар экендиги. жана тиешелүү өзүмдүк функцияларды аныктоочу теңдемелер так көргөзүлдү. Бул фактылардын дээрлик баарын түйүндүү теңдемелердин чыгарылыштарын тигил же бул тактыкта табууга пайдаланса болот. Өтмөк методун колдонуп, Титчмарштын теоремасын жалпылоого боло тургандыгы жөнүндө да айтылды.

Негизги сөздөр: *түйүн, теңдемелер, Гильберт-Шмидтин теоремасы, аналогу, функциялар, өтмөк, факты, далилдөө, булагы.*

Методом перехода для уравнений свертки назван метод исследования уравнений свертки Вольтерра первого рода, предложенный автором ранее на существование и нахождение их приближенных решений в пространстве L_2. В данной статье, пользуясь этим методом: 1) Доказана известная теорема Титчмарша о свертке; 2) Установлена для уравнений свертки теорема, аналогичная фундаментальной теореме Гильберта-Шмидта для истокообразной функции по симметричному ядрому. В частности, доказано существование собственных значений и их вещественность. а также возможность разложить по собственным функциям в ряд Фурье ядра и его модуля. Всё это можно использовать при построении приближенных решений названных уравнений свертки. А также намечается возможность распространения результатов на обобщение теоремы Титчмарша о свёртке.

Ключевые слова: *узел, уравнения, теорема Гильберта-Шмидта, аналог, функции, переход, факт, доказательство, источник*

To store the herring, they called a method for studying the convolution equations of Volterra of the first kind proposed by the author on the existence of a frame and finding approximate solutions in the space L_2. This article shows that, using this method is it possible to prove well-known Titchmarsh convolution theorem and also obtain the Hilbert-Schmidt fundamental theorem for convolution equations for a source-like function with a symmetric kernel of a linear Fredholm equations. The existence of eigenvalues and their realness, as well as the ability to expand in eigenfunctions in a Fourier series are proved. All this can be used in constructing approximate solutions of the convolution equations, and the possibility of extending the results to a generalization of the Titchmarsh convolution theorem.

Key words: *knot, equations, Hilbert-Schmidt's theorem, analog, functions, transition, fact, proof, source.*

В данном сообщении рассматривается связь между уравнением свертки

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = f(t),\ 0 \le t \le T \qquad (1)$$

с одной стороны, и с другой - уравнением вида

$$\lambda\, \varphi\,(T-t)=\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds\ ,\ 0 \le t \le T,$$

а также её некоторые развития.

Методом перехода для уравнений свертки (сокращенно, методом *ПУС*) мы называем метод, предложенный автором в работе [1], при изучении уравнения (1) на существование и единственность. Кратко его опишем. Будем считать, что $a(t) \in C\,[0,T]$ – известная функция. Ответ на вопрос единственности решения уравнения (1) в пространстве L_2, точнее, в $L_2\,[0,T]$, содержится в известной теорема Титчмарша о свертке [2], а именно, справедлива

Теорема Титчмарша. Для единственности решения $\varphi\,(t)\in L_2$ уравнения свертки

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного $\delta \in (0,T)$ функция a (t) $\in L_2[0,T]$ была отличной от нуля почти всюду на $(0,\delta)$.

Титчмаршем доказано, что (2) имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta = T$, где $a(t) = 0$ и φ (t) = 0 почти всюду на $[0,\alpha]$ и $[0,\beta]$ соответственно. Последнее утверждение, очевидно, равносильно следующему предложению.

Теорема1. Уравнение (2) имеет место тогда и только тогда, когда

$$a(t-s)\ \varphi\ s) = 0,\quad 0 \le s \le t \le T. \qquad (3)$$

В качестве первого применения метода *ПУС,* докажем, пользуясь им, теорему Титчмарша о свёртке, точнее, что из уравнения свёртки (2) вытекает равенство (3).

Следуя работе [1], обозначим

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), 0 \le t \le T, \\ \varphi(2T-t), T < t \le 2T, \end{cases} \qquad (4)$$

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, 0 \le t \le T, \\ a(t-T), T < t \le 2T. \end{cases} \qquad (5)$$

Тогда [1]

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = 0,\ 0 \le t \le 2T. \qquad (6)$$

В самом деле, преобразуя левую часть (6) с учётом обозначений (4) и (5), имеем

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds + \int_t^{2T} \omega(s-t)y(s)ds =$$

$$= \int_0^t \omega(t--s)y(s)ds + \int_0^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(2T-s)ds, \text{ т.е.}$$

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds + \int_0^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(s)ds. \qquad (7)$$

Последнее равенство при $t \le T$ согласно обозначению (5) имеет вид

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = \int_0^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(s)ds,\ 0 \le t \le T. \qquad (8)$$

Из правой части (8) в силу (4) и (5) имеем

$$\int_0^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(s)ds = \int_0^{T-t} a(T-t-s)y(s)ds == \int_0^{T-t} a(T-t-s)\varphi(s)ds = 0,$$

т.е. при $t \le T$ выполняется равенство (6):

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = 0,\ 0 \le t \le T. \qquad (9)$$

Пусть теперь $t \in (T,2T]$. Тогда второе слагаемое правой части (7) обращается в нуль. Действительно, при $t > T$ имеем

$$\int_0^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(s)ds = \int_{T-t}^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(s)ds,$$

отсюда с учётом (5) подынтегральная функция $\omega(2T - t - s) = 0$ и, следовательно, при $t > T$ второе слагаемое обращается в нуль. Тогда при $t > T$ из (7) следует ,что

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds, T < t \le 2T. \qquad (10)$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Правая часть (10) представима в виде

$$\int_0^t \omega(t-s)y(s)ds = \int_0^{T-t} a(T-t-s)y(s)ds = \int_0^{T-t} a(T-t-s)\varphi(s)ds, \text{ т.е.}$$

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = 0,\ 0\le t\le 2T. \tag{11}$$

Из (9) и (11) получаем равенство (6). Совершенно аналогично можно показать, что нечётное продолжение решения уравнения (2) на [0,2T] является решением уравнения (6). Действительно, положим

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), 0 \le t \le T, \\ -\varphi(2T-t), T < t \le 2T. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда уравнение (6) имеет место. В самом деле,

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds + \int_t^{2T} \omega(s-t)y(s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds - \int_t^{2T} \omega(s-t)y(2T-s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds - \int_{2T-t}^{0} \omega(2T-s)y(s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds - \int_0^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(s)ds, 0 \le t \le T, \text{ т.е.}$$

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = \int_0^t \omega(t-s)y(s)ds - \int_0^{2T-t} \omega(2T-t-s)y(s)ds, \tag{13}$$

Из равенства (13) совершенно так же, как и в случая $y(t) = y(2T-t)$, получаем уравнение (6) для нечетного решения $y(t) = -y(2T-t)$. Далее, если $y(t)\in L_2[0,2T]$ – произвольное решение, т.е.

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds = 0, 0 \le t \le 2T, \tag{14}$$

то заменяя в равенстве (14) t на 2T-t, получаем

$$\int_0^{2T} \omega(|2T-t-s|)y(s)ds = 0,\ 0 \le t \le 2T, \text{ отсюда}$$

$$\int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(2T-s)ds = 0,\ 0 \le t \le 2T. \tag{15}$$

Из линейных уравнений (14) и (15), очевидно, следует, что $y(t) + y(2T-t)$ и $y(t) - y(2T-t)$, так же являются чётным и нечётным решениями уравнения (14). Сужение на [0,T] каждого из таких решений, как показано выше, является решением уравнения (2). Сумма его решений $y(t) + y(2T-t)$ и $y(t) - y(2T-t)$ т.е. $2y(t)$ так же является решением уравнения (2). Поэтому сужение на [0,T] любого решения уравнения (14) так же является решением уравнения (2).

Итак, нами установлено, что любое чётное или нечётное продолжение на [0,2T] решения уравнения (2) является решением уравнения (14) и, наоборот, сужение на [0,T] любого решения (14) является решением (2). Далее, если $y(t)$ – любое решение (14), то чётными и нечётными его решениями являются функции $y(t) + y(2T-t)$ и $y(t) - y(2T-t)$. Поэтому для установления единственности решения (2), необходимо и достаточно показать единственность чётного и нечётного решений (14). Обозначим

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \tag{16}$$

-последовательность всех собственных чисел, упорядоченных по убыванию модулей с учётом их кратности, уравнения

$$\lambda y(t) = \int_0^{2T} \omega(|t-s|)y(s)ds,\ 0\le t\le 2T, \tag{17}$$

а

$$y_1(t), y_2(t), \ldots \tag{18}$$

– соответствующая система ортонормированных собственных функций (17).

Так как ядро $\omega(|t-s|)$ симметрично, то собственные числа существуют и все они вещественны [3, 4]. Для удобства сформулируем в виде отдельных свойств, установленных в [1].

1°. Не ограничивая общности, можно считать, что каждая $y_i(t)$ на [0,2T] из (18) является либо чётной, либо нечётной, т.е. $y_i(t) = y_i(2T-t)$, либо

$y_i(t) = -y_i(2T-t)$, функцией.

2°. Оператор

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\Omega y=\int_0^{2T} \boldsymbol{\omega}(\,|\,\boldsymbol{t-s}|)\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{d\,s},\ 0 \le t \le 2T, \qquad (19)$$

переводит чётную (нечётную) на [0,2T] функцию на чётную (нечётную), другими словами, оператор (19) сохраняет чётность функции.

3°. Любое чётное (нечётное) на [0,2T] решение уравнения (17) удовлетворяет при $\lambda=\lambda_i$ ($\lambda=-\lambda_i$) уравнению

$$\int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{a(t-s)\varphi i(s)ds = \lambda i\,\varphi i(T-t)} \quad 0\le t \le T, \qquad (20)$$

и, наоборот, любое решение уравнения (20), продолженное на [0,2T] четно (нечетно) удовлетворяет уравнению (17) при $\lambda = \lambda_i$ ($\lambda = -\lambda_i$). Короче говоря, собственные значения, отвечающие четным решениям (17), совпадают с собственными значениями уравнения (20).

4^0. Не ограничивая общности, можно считать, что функции y_{2i} (t) (y_{2i-1} (t)) из (18), т.е. функции с четными (нечетными) номерами четны (нечетные) на [0,2T] и собственные числа из (16) удовлетворяют равенствам

$\lambda_{2i-1}= -\lambda_{2i}$, i = 1, 2, … .

Кроме того, набор $\bar{\lambda}_1\,\bar{\lambda}_2, \dots; \bar{\lambda}_I = \lambda_{2i}$, i = 1, 2, … , исчерпывает все множество собственных чисел уравнение (20). Поэтому $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots; \bar{\lambda}_I = \lambda_{2i}$, i = 1, 2, … , и для удобства λ_{2i} снова переобозначим через λ_i.

Рассмотрим функцию

$$f(t)=\int_0^t a(t-s)(s)\psi(s)ds, 0 \le t \le T\,, \qquad (21)$$

где $\psi(s)\epsilon\, l_2\,[0,T]$. По аналогии с теорией линейных интегральных уравнений Фредгольма, назовем функцию (21) истокообразной.

Как было показано выше, что для уравнения (20) существуют последовательность всех собственных чисел $\{\lambda_i\}$, расположенных по убыванию модулей, и соответствующая система ортонормированных собственных функций. $\{\varphi_i(t)\}$ причем $\varphi_i(t) = \sqrt{2}\, y_{2i}(t)$ и

$$\int_0^t a(t-s)\varphi_i(s)ds = \lambda_i\ \ \varphi i\,(T-t),\ 0\le t\le T, I=1,2,\dots.. \qquad (22)$$

Из представления (21) согласно (22) имеем

$$f(T-t)=f_I\ \varphi_{\,1}(t) + f_I\ \varphi_{\,2}(t) + \dots, \qquad (23)$$

где f_i – коэффициенты Фурье f(T – t), $f_I =\int_0^T f(T-s)\varphi\ i(s)ds, i = 1, 2, ..,$

Докажем, что разложение Фурье (23) сходится в $L_2\,[0,T]$ к функции f(t). Действительно, если положить $\psi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{\,I}\,\varphi_{\,I}(t) + \varphi_{\,0}(t)$, $0\le t \le T$, где $\psi_{\,I}$ – коэффициенты Фурье ψ (t), φ_0(t) – решение (2), то из (21) имеем

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda i\, \psi_i\, \varphi_i\ (T\text{-}t)\,. \qquad (24)$$

Из разложений (23) и (24) получаем $f_i = \lambda_i\,\psi_{\,I}$, I = 1,2, ... так как $(\psi_{\,1}{}^2+ \psi_{\,2}{}^2+\dots) \le \|\ \psi\ \|^2$,

то $\left| f(t) - \sum_{i=1}^{N} \lambda i\, \psi_i\, \varphi_i\ (T\text{–}t)\ \right| = \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda i\, \psi_i\, \varphi_i\ \ (T-t)\ \right|$,

отсюда $\|f(t)\text{–}\sum_{i=1}^{N} \lambda i\, \psi_i\, \varphi_i(T\text{–}t)\|^2 = \int_0^T \left|\ \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda i\, \psi_i\, \varphi_i\ \ (T-t)\right|^2 dt \le \sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_i^2\, \psi_i^2 \le \lambda_{\,N+1}{}^2\ \|\ \psi\ \|^2$,

т.е. $\|\ f(t) - \sum_{i=1}^{N} \lambda i\, \psi_i\, \varphi_i\ (T\text{-}t)\ \| \le \left|\lambda_{\,N+1}\right|\ \|\ \psi\ \|$,

где норма функции ψ (t) в пространстве $L_2\,[0,T]$ обозначено символом $\|\ \psi\ \|$.

Откуда, в силу $\lambda_{\,N+1} \to 0$ при $N\to\infty$, заключаем, что разложение (24) имеет место , другими словами, для истокообразной функции выполняется разложение Фурье (24). (На самом деле имеет место более точные утверждения, которые приведены ниже в теореме 2) .

Продолжим доказательство теоремы 1 . Пусть $\varphi(t)\epsilon\ L_2\,[0,T]$ - любое фиксированное решение уравнения (2), т.е.

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = 0, 0 \le t \le T, \qquad (25)$$

Покажем, что из уравнения (25) следует

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\int_0^t \left| a(t-s) \right| \varphi(s)ds = 0, 0 \le \text{t} \le \text{T}, \tag{26}$$

и, наоборот, т.е. справедлива

Лемма 1. Уравнения (29) и (30) в классе $L_2\,[0,T]$ эквивалентны.

Доказательство. Обозначим неотрицательные и отрицательные части непрерывной функции

$a(T-t)$ соответственно обозначим a^+(T–t) и a^-(T–t). Так что $a(T-t) = a^+(\text{T–t}) + a^-(\text{T–t})$, (27)

$\left| a(T-t) \right| = a^+(\text{T} - \text{t}) - a^-(\text{T} - \text{t})$, $0 \le \text{t} \le \text{T}$. А также обозначим $\{\lambda\, i\}$ и $\{\mu\, i\}$ – последовательности собственных чисел соответственно уравнений

$$\int_0^t \boldsymbol{a(t-s)\varphi_i(s)ds = \lambda i\, \varphi_i(T-t)} \quad 0 \le \text{t} \le \text{T}, \tag{28}$$

$$\int_0^t \boldsymbol{\left| a(t-s) \right| \psi i(s)ds = \lambda i\, \psi i(T-t)} \quad 0 \le \text{t} \le \text{T}, \tag{29}$$

а $\{\varphi i(\text{ t})\}$ и $\{\psi i(\text{t })\}$ – им соответствующие системы ортонормированных собственных функций.

Логически возможен лишь один из двух случаев:

а) все $\varphi_{\text{I}}(0)$ $(\psi_{\text{I}}(0))$ равны нулю, т.е. $\varphi_{\text{I}}(0) = 0$ $(\psi_{\text{I}}(0) = 0)$, i = 1,2, …,

б) для некоторого i выполняется неравенство $\varphi_{\text{I}}(0) \ne 0$ $(\psi_{\text{I}}(0) \ne 0)$.

Сначала рассмотрим случай б). Пологая t = T, из равенства (28) имеем

$$\int_0^T a(T-s)\varphi i(s)ds = \lambda\text{i}\, \varphi i(0), \text{I} = 1, 2, \dots , \tag{30}$$

т.е. $a_{\text{i}} = \lambda_{\text{i}}\, \varphi_{\text{I}}(0)$, a_{i}– коэффициенты Фурье функции $a(T-s)$. Здесь следует заметить, что в силу непрерывности a(t) на [0,T], левая часть (28) непрерывна на [0,T], следовательно, правая часть (28) так же непрерывная на [0,T], Так что равенства $a_{\text{i}} = \lambda_{\text{i}}\, \varphi_{\text{i}}(0)$, i = 1,2, …, вполне оправданы. Так как для некоторого i $\varphi_{\text{i}}(0) \ne 0$, то функция a(s) не может быть решением (25). Пусть

$$a(T-s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\ \varphi_i(s) - \varphi_0(\text{s}) , 0 \le \text{s} \le \text{T}, \tag{31}$$

где a_{i} – коэффициенты Фурье функции $a(T-s)$, φ_0(s) – некоторая функция ортогональная ко всем φ_{i}(s), значит φ_0(s) – решение уравнения (25). Теперь умножая обе части (30) на коэффициенты a_{i}, получим

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^2 = \int_0^T a(T-s) \sum_{i=1}^{N} a_i\ \varphi_i(s)\, ds. \tag{32}$$

Так как в силу (31) в пространстве L_2 при N→∞ $\sum_{i=1}^{N} a_i\ \varphi_i(s) \to a(\text{T} - \text{s}) + \varphi_0(\text{s})$

и левая часть (32) сходится к сумме $a_1^2 + a_2^2 + \dots$, то, переходя к пределу при N→∞,
получим $a_1^2 + a_2^2 + \dots = \int_0^T a(T-s)\big(a(T-s)\big) + \varphi_0(\text{s}))ds.$

Так как φ_0(s) – решение уравнения (25), то отсюда

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots = \int_0^T a^2(T-s)ds, \text{ т.е } a_1^2 + a_2^2 + \dots = \int_0^T a^2(s)ds.$$

В силу равенства (24) находим

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots,) + \| \ \varphi_0 \|^2 = \int_0^T a^2(s)ds. \tag{33}$$

Из равенств (31) и (33) следует, что $\varphi_0(\text{s}) = 0$, $0 \le \text{s} \le \text{T}$, следовательно, имеет место разложение

$$a(T-s) = a_1\, \varphi_1(\text{s}) + a_2\, \varphi_2(\text{s}) + \dots, \quad 0 \le \text{s} \le \text{T}. \tag{34}$$

Тогда из равенств (27) и (34) имеем

$$a_1\, \varphi_1(\text{s}) + a_2\varphi_2(\text{s}) + \dots = a(T-s) = \boldsymbol{a}^+(\text{T} - \text{s}) + \boldsymbol{a}^-(\text{T} - \text{s}) = [\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, \varphi_i(s) + \varphi_{10}(\text{s})\ ] +$$

$$+ [\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i\ \varphi_i(s) + \varphi_{20}(\text{s})] = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i)\varphi_i(s) + [\ \varphi_{10}(\text{s}) + \varphi_{20}(\text{s})], \tag{35}$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

где φ_{10}(s) и φ_{20}(s) ортогональны к φ_i(s), следовательно, φ_{10}(s) и φ_{20}(s) – решения уравнения (25), α_i, β_i – коэффициенты Фурье соответственно функции $\alpha^+(T-s)$ и $\alpha^-(T-s)$. Из цепочек (35) находим $a_i = \alpha_i + \beta_i$, i = 1,2, ..., и

$$\varphi_{10}(s) + \varphi_{20}(s) = 0,\ 0 \le s \le T, \qquad (36)$$

$$a_i = \alpha_i + \beta_i,\ i = 1,2, \ldots .$$

Так как функции $\alpha^+(T-s)$ и $\alpha^-(T-s)$ взаимно ортогональны, то

$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots = \int_0^T a^+(T-s)\big(a^-(T-s)\big)ds = 0$, поэтому

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots = \int_0^T a^2(s)ds = (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \ldots$, т.е.

$\|\alpha(T-s)\|^2 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \ldots$.

Аналогично, $|\alpha(T-s)| = \alpha^+(T-s) - \alpha^-(T-s)$,

$$|\alpha(T-s)| = \sum_{i=1}^{\infty}\gamma i\ \varphi_i(s) + \varphi_0(s) = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\alpha i\ \varphi_i(s) + \varphi_{10}(s)\right] - \left[\sum_{i=1}^{\infty}\beta i\ \varphi_i(s)ds + \varphi_{20}(s)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha i - \beta i)\ \varphi_i(s) + [\varphi_{10}(s) - \varphi_{20}(s)]. \qquad (37)$$

Из последних цепочек имеем

$$\|\alpha(T\text{-}s)\|^2 = [(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + \ldots] + 4\,\|\varphi_{10}(s)\|^2,$$

$$\|\,|\alpha(T\text{-}s)|\,\|^2 = [(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \ldots] + 4\,\|\varphi_{10}(s)\|^2. \qquad (38)$$

Из равенств (36) и (38) следует ,что $\varphi_{10}(s) = 0,\ 0 \le s \le T$. Итак, из (37)

$$|\alpha(T\text{-}s)| = \sum_{i=1}^{\infty}\gamma i\ \varphi_i(s), \qquad (39)$$

где γ_I – коэффициенты Фурье функции $|\alpha(T-s)|$.

Из равенств (34) и (39) наблюдаем, что любое решение уравнения (25) является решением уравнения (26). Теперь покажем, что из равенства (26) следует уравнение (25). В самом деле, при выполнении случая б) относительно a(T-s) для некоторого решения ψ_i(s) уравнения (29) будет выполняться неравенство $\psi_i(0) \neq 0$. Тогда, используя обозначение знака

$$\text{Sgn}\ a(\text{T}-\text{s}) = \begin{cases} 1, \text{если } a(\text{T}-\text{s}) > 0, \\ 0, \text{если } a(T-s) = 0, \\ -1, \text{если } a(\text{T}-\text{s}) < 0, \end{cases}$$

имеем тождество $\int_0^T a(T-s)\ \text{Sgn}\ a(\text{T}-\text{s})\ \text{g (s) ds} = \int_0^T |\alpha(\text{T}-\text{s})|\ \text{g (s) ds}$,
отсюда

$$\int_0^T a(T-s)\ \text{Sgn}a(\text{T}-\text{s})\ \text{g (s) ds} = \mu_1 g_1\psi_1(0) + \mu_2 g_2\psi_2(0) + \ldots, \qquad (40)$$

где g_i – коэффициенты Фурье функции g (s) в разложении

$g(s) = [g_1\psi_1(s) + g_2\psi_2(s) + \ldots] + \psi_0(s)$, $\psi_0(s)$ – некоторое решение (30).

Если предположить, что $\psi_i(0) = 0$, $_i$ = 1, 2, … , то из (40) имеем $\int_0^T a(T-s)\ \text{Sgn}a(\text{T}-\text{s})\ \text{g (s) ds} = 0$ для любой функции g (s) є L_2. Тогда из последнего уравнения при g (s) $= a(T-s)$ Sgn α (T – s) следует, что a^2(T–s) = 0 , $0 \le s \le T$. Этого не возможно в силу того, что для некоторого i $\varphi_i(0) \neq 0$. Это противоречие показывает, что если для некоторого i $\varphi_i(0) \neq 0$, то найдется номер j такой, что $\psi_j(0) \neq 0$. Поэтому из уравнения (26) следует (25). Итак, для любого решения ψ (t) уравнения (30) выполняется $\int_0^T a(T-s)\ \psi\ \text{(s) ds} = 0$. Так как ψ (t) – любое решение, то из последнего уравнения имеем $\int_0^t a(t-s)\ \psi\ \text{(s) ds} = 0$ в силу того, что из представления $|\alpha(T-s)| = \gamma_I\psi_1(s) + \gamma_2\psi_2(s) + \ldots$ вытекает $a(T-s) = b_I\psi_1(s) + b_2\psi_2(s) + \ldots$. значит, в случае б) уравнения (25) и (26) эквивалентны.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Пусть теперь имеет место

Случай а). Тогда для любого i имеют место равенства

$$\int_0^T a(T-s)\varphi_i(s)ds = 0, \text{ i=1, 2, …}. \qquad (41)$$

Рассмотрим тождество

$$\int_0^T a(T-s)\ \mathrm{Sgn}a(\mathrm{T}-\mathrm{s})\ \mathrm{g}(\mathrm{s})\ \mathrm{ds} = \int_0^T \mid a(\mathrm{T}-\mathrm{s}) \mid \mathrm{g}(\mathrm{s})\ \mathrm{ds}, \qquad (42)$$

где g (s) – произвольная функция из $L_2[0,T]$. Покажем, что левая часть (42) равна нулю. Действительно, пользуясь разложением

$$\mathrm{Sgn}a(\mathrm{T}-\mathrm{s})\ \mathrm{g}(\mathrm{s}) = [h_1\ \varphi_1(s) + h_2\ \varphi_2(s) + \ldots] + \varphi_0(s), \qquad (43)$$

где h_i – коэффициенты Фурье левой части (43), φ_0 (s) – некоторая функция, ортогональная ко всем функциям φ_i (s), I = 1, 2, …, т.е. решение уравнения (25). Подставляя разложение (43) в левую часть (42), имеем

$$\int_0^T a(T-s)\ [\sum_{i=1}^{\infty} h_i\ \varphi_i(s)ds + \varphi_0\ (\mathrm{s})]\mathrm{ds} = \int_0^T a(T-s) \sum_{i=1}^{\infty} h_i\ \varphi_i(s)ds =$$

$$= \int_0^T a(T-s) \sum_{i=1}^{N} h_i\ \varphi_i(s)ds + \int_0^T a(T-s) \sum_{N+1}^{\infty} h_i\ \varphi_i(s)ds \text{ , т.е.}$$

$$\int_0^T a(T-s)\mathrm{Sgn}a(\mathrm{T}-\mathrm{s})\mathrm{g(s)ds} = \int_0^T a(T-s) \sum_{i=1}^{N} h_i\ \varphi_i(s)ds + \int_0^T a(T-s) \sum_{N+1}^{\infty} h_i\ \varphi_i(s)ds \qquad (44)$$

Первый интеграл в правой части (44) равен нулю в силу равенств (41), второй- также равен нулю, поскольку после применения неравенства Коши-Буняковского [4] к этому интегралу имеем:

$$\left| \int_0^T a(T-s) \sum_{N+1}^{\infty} h_i\ \varphi_i(s)ds \right| \le \| a \|^2\ \sum_{i=N+1}^{\infty} h_i^2.$$

Отсюда $\sum_{i=N+1}^{\infty} h_i^2 \to 0$ при N →∞. Тогда из тождества (42) следует равенство

$$\int_0^T \mid a(\mathrm{T}-\mathrm{s}) \mid \mathrm{g}(\mathrm{s})\ \mathrm{ds} = 0. \qquad (45)$$

Заменяя функцию g (s) на

$$g_\tau(s) = \begin{cases} 0, 0 \le s \le \tau, \\ g(s-\tau), \tau < s \le T, \end{cases}$$

из (45) получаем, что $\int_0^t \mid a(\mathrm{t}-\mathrm{s}) \mid \mathrm{g}(\mathrm{s})\ \mathrm{ds} = 0,\ 0 \le t \le T.$ (46)

Теперь пологая, что g (s) = $\mid \varphi(\mathrm{s}) \mid$, где $\varphi(\mathrm{s})$ - любое непрерывное решение уравнения (26), причем не ограничивая общности, можно считать $\varphi(0)$=0, из (46) получаем

$\int_0^t |a(\mathrm{t}-\mathrm{s})|\ |\varphi(\mathrm{s})|\mathrm{ds} = 0,\ 0 \le t \le T$. Отсюда $a(t-s)\varphi(s) = 0,\ 0 \le s \le t \le T$.

А если, в (46) полагать, что g(s) = φ(s), то из уравнения (25) следует (26).

Мы докажем теперь, что из уравнения (26) следует (25). Действительно, пусть ψ (s) - любое решение уравнения (26) . Его разложим в ряд Фурье:

$$\psi(\mathrm{s}) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\ \varphi_i(s) + \varphi_0(s), \qquad (47)$$

где ψ_i - коэффициенты Фурье функции ψ (s) , $\varphi_0(s)$- некоторая функция , ортогональная ко всем $\varphi_i(s)$, i=1, 2, . . ., в частности, $\varphi_0(s)$ является решением уравнения (25) . Подставляя (47) в (25) при $\mathrm{t} = T$, имеем

$$\int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s})\ [\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\ \varphi_i(s) + \varphi_0(s)]\mathrm{ds} = \int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s}) \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\ \varphi_i(s)\ \mathrm{ds} =$$

$$= \int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s}) \sum_{i=1}^{N} \psi_i\ \varphi_i(s)\ \mathrm{ds} + \int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s}) \sum_{i=N+1}^{\infty} \psi_i\ \varphi_i(s)\ \mathrm{ds} =$$

$$= \int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s}) \sum_{i=N+1}^{\infty} \psi_i\ \varphi_i(s)\ \mathrm{ds}, \text{ т. е.}$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$\int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s})\ \psi$ (s) ds=$\int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s})\ \sum_{i=N+1}^{\infty} \psi_i\ \varphi_i(s)$ ds. (48)

Правая часть (48) в силу неравенства Коши-Буняковского стремится к нулю при N →∞, поэтому $\int_0^T a(\mathrm{T}-\mathrm{s})\ \psi$ (s) ds=0 . Так как ψ (s) -произвольное решение (26), то из последнего уравнения получаем

$\int_0^t a(\mathrm{t}-\mathrm{s})\ \psi$ (s) ds=0 , 0≤t≤ T,

т. е. в случае а) из уравнения (26) вытекает (25).

Итак, эквивалентность уравнений (25) и (26) и в случае а) и , в случае б) установлена , тем самым лемма 1 доказана .

Из доказанной леммы получаем, что из уравнения (25) следует

$\int_0^t |\ a(\mathrm{t}-\mathrm{s})\ |\ |\ \varphi$ (s) $|$ds= 0, 0≤t≤ T.

Откуда $a(t-s)\varphi(s)$ = 0, 0≤s≤ t $\le T$, т. е. следует (4). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. По ходу доказательства теоремы установлено, что условия $\varphi_i(0)=0, i=1,2,...$ имеют место тогда, и только тогда, когда $a(\mathrm{t}) \neq 0$, 0≤t≤ T.

Замечание 2. Свертка двух функций из L_2 будет непрерывной на [0, T].

Действительно, если в свертке L_2 – функций a(t) и φ(t):

f(t) $=\int_0^t a(\mathrm{t}-\mathrm{s})\ \varphi$(s) ds , 0≤t≤ T, (49)

полагать, $\varphi_n(s)$ є C[0,T] и ‖ $\varphi_n(s)-\ \varphi$(s) ‖→0 при n→∞, тогда функция

f_n(t) $=\int_0^t a(\mathrm{t}-\mathrm{s})\ \varphi_n(s)$ds , 0 ≤ t ≤ T,

очевидно, будет непрерывной на [0, T] . Далее имеем

$|$f(t)–f_n(t)$|$≤$\int_0^t a(\mathrm{t}-\mathrm{s})\ |\varphi$(s)–$\varphi_n(s)|$ds≤($\int_0^t a^2$(s)ds)$^{1/2}$($\int_0^t |\varphi$(s) $-\varphi_n(s)|^2$ds)$^{1/2}$≤‖ a ‖$_c$‖ $\varphi_n(s)-\varphi$(s) ‖. (50)

Так как правая часть (49) независимо от t є [0,T] стремится к нулю при n→∞, т.е. непрерывная функция f_n(t) равномерно на [0,T] стремится к f(t) при n→∞, поэтому из (50) заключаем , что f(t) также непрерывна.

Для истокообразной функции (50) справедливо утверждение, аналогичное классической теореме Гильберта-Шмидта [3, 4], а именно, имеет место

Теорема 2. Пусть в равнстве (49) функции a(t) и $\varphi(s)$ из L_2[0,T]. Тогда разложение истокообразной функции (49) в ряд Фурье функции f(t)

S(t) = $\sum_{i=1}^{\infty} f_i\ \varphi_i(T-\ \mathrm{t})$, 0 ≤ t ≤ T, сходится в среднем к функции f(t), т.е. S(t) = f(t), где φ_1(t), φ_2(t), ... – ортонормированная система решений уравнения (20), а

f_n=$\int_0^T$ f($T-$ s) $\varphi_n(s)$ds, n = 1,2,3,...,

Доказательство . Разлогая $\varphi(s)$ из L_2[0,T] в правой части (49) в ряд :

$$\varphi\ (\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\ \varphi_i(\mathrm{t}) + \varphi_0(\mathrm{t}),\ 0\le t\le T, \qquad (51)$$

где φ_i-коэффициенты Фурье функции φ(t), в частности, φ_0(t) является решением уравнения $\int_0^t a(\mathrm{t}-\mathrm{s})$ φ_0(s) ds = 0 , 0≤t≤ T.

Далее, подставляя разложения (51) в правую часть (50), имеем

$$\mathrm{f}\ (\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i\ \varphi_i(T-\ \mathrm{t}),\ 0\le t\le T, \qquad (52)$$

Теперь покажем, что правая часть (52) сходится в среднем к f($T-$ t) .

Действительно, имеем f_n=$\int_0^T$ f($T-$ s) $\varphi_n(s)$ds=$\int_0^T$ f(s) $\varphi_n(T-\ $s)ds=$\int_0^T \varphi_n(T-\ $t) $\int_0^t a(\mathrm{t}-\mathrm{s})\ \varphi$(s) dsdt =$\int_0^T \int_s^T a(\mathrm{t}-\mathrm{s})\varphi_n\ (T-\ $t)$\varphi$(s)dtds = $\int_0^T \int_0^{T-s} a(T-\ \mathrm{t}-\mathrm{s})\varphi_n$ (t)dt φ(s) ds =$\int_0^T \lambda_n\varphi_n(s)\varphi(s)$ ds= $\lambda_n\varphi_n$, т. е.

$$f_n=\lambda_n\varphi_n, \qquad (53)$$

где φ_n - коэффициенты функции $\varphi(s)$ в разложении (51). Из (52) находим

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$f(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i \, \varphi_i(T-t) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i \, \varphi_i(T-t) = \sum_{i=N+1}^{\infty} f_i \, \varphi_i(T-t),$$

отсюда

$$\| f(t) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi_i \, \varphi_i(T-t) \|^2 \le \int_0^T \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i \, \varphi_i(T-t)\right)^2 dt \le \sum_{i=N+1}^{\infty} f_i^2, \text{ т. е.}$$

$$\| f(t) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi_i \, \varphi_i(T-t) \|^2 \le \sum_{i=N+1}^{\infty} f_i^2. \quad (54)$$

Правая часть (54) стремится к нулю при $N \to \infty$. Итак разложение (52) имеет место, или, с учетом (53)

$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \, \varphi_i(T-t), \; 0 \le t \le T.$ Теорема 2 доказана.

Мы, применяя метод *ПУС*, заново доказали известную теорему Титчмарша о свертке [2], а также теорему 2. Некоторые применения метода *ПУС* приведены в работах [1,5]. Использование указанного метода для обобщения названной теоремы Титчмарша будет рассмотрена в отдельной работе автора.

Литература:

1. Сражидинов А. Об одном необходимом и достаточном условии существования для уравнения Вольтерра первого рода типа свертки // Изв.АН Кирг.ССР. -1985. - №6. – С.15-19.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. - М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 480 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.: Учеб. для мат. спец. ун-тов, -3-е изд., перераб. - М.: Наука, 1972. - 496 с.
4. Петровский И.Г. Лекция по теории интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965.
5. Сражидинов А. О решении двумерного сверточного интегрального уравнения первого рода // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе, 1988. – Вып.21. - С. 57-67.
6. Сражидинов А. Элементарное доказательство великой теоремы Ферма для показателя 3. / Известия ВУЗов Кыргызстана. 2019. №. 10. С. 3-6.